J. v. ノイマン　井上健・広重徹・恒藤敏彦訳

量子力学の数学的基礎

J. von Neumann

DIE MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

みすず書房

J.v. ノイマン

量子力学の数学的基礎

井上　健
広重　徹
恒藤敏彦
共訳

みすず書房

DIE MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

by

Johann Ludwig von Neumann

Springer Verlag, Berlin 1932

序

湯 川 秀 樹

1925, 6 年頃に de Broglie 及び Schrödinger の波動力学と Heisenberg 等の量子力学とが殆んど同時にでき上り，それらの見かけ上の大きな違いにも拘らず形式的に同等であることが明らかになった．そして Bchr に始まる量子力学の統計的解釈が，1927, 8 年頃には Heisenberg の不確定性原理や Born の相補性の考えが根幹となって一応物理学者にとって満足すべき理論体系ができ上った．しかし，それはまだ数学者を満足させる程まで論理的な厳密さをもって築き上げられた体系ではなかった．特に Driac のデルタ函数を使う方法は，物理的な直観によって本質的に正しいことが分ってみても，数学的にはそのまま受け入れにくかった．

このような不満足な状態を是正するために，Neumann はそれまで物理学者には縁の遠かった Hilbert 空間の理論を基礎におくことによって，論理的に一貫し，数学者にも受け入れられる形に量子力学を再構成することに成功した．今日では，量子力学系に対する直観的な像を描くためにも，Hilbert 空間はなくてはならぬ背景にさえなってしまった．それは Newton 力学の背景である三次元 Euclid 空間や，Einstein の相対論の背景である四次元空間にも比すべきものである．しかし，Hilbert 空間が通常の三次元ないし四次元空間と本質的に違うのは，それが量子力学系に対する観測と直接結びついている点である．実際 Neumann は本書において，量子力学の数学的な基礎を明らかにしたばかりではなく，観測の問題の精密な分析をも行い，更に進んで量子統計力学の再構成までも試みた．

それ等いろいろな理由によって，本書は歴史的に重要な意義を持っているばかりでなく，今日でも理論物理学を学ぶものが一度は熟読しなければならない書物である．今日まで本書の日本訳が出なかったことは不思議なくらいであるが，その一つの理由は翻訳が非常に骨の折れる仕事であったからである．この難事業を完遂された井上，広重，恒藤三氏に感謝する次第である．

1957 年 秋

序

彌 永 昌 吉

本書が物理学史上に占めている位置は，湯川博士の序文に明らかにされている．以下には，数学の側からみた本書の意義について述べよう．

本書の著者，J. von Neumann の生涯については，巻末の「訳者あとがき」に詳しい．それからもわかるとおり，von Neumann は物理学者というよりも，むしろ数学者であった．しかも数学者として非常に幅広い活動をした人である．最初は，数学基礎論の立場から集合論の公理系を与えた純粋数学者として出発したが，晩年には，オペレーションズ・リサーチや電子計算機の説明・運用にもたずさわり，アメリカで数学の応用されるあらゆる問題の「最良の解決」は，von Neumann に相談することであるとさえいわれた．正に今世紀前半の数学界の巨人の一人であった．

本書の原著は，1932 年に出版されたから，von Neumann が 29 才のときの作である．それよりも 3 年前，*Mathematische Annalen* の 102 巻に発表されたこの著者の論文 *Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischen Funktionaloperatoren* は，今世紀の解析学に新しい時代を画したものであった．いわゆる Hilbert 空間は，Hilbert の今世紀初頭以来の実績の中に導入されたが，すっきりした公理的基礎の上に現代数学的な方法でその理論が扱われるようになったのは，この論文に始まるのである．この論文の中には Schrödinger の 1926 年の論文が引用されているから，それを書くときすでに，von Neumann は量子力学への応用を考えていたのかもしれない．しかしその応用が円滑にできるようにするためには，作用素の函数や，交換可能な作用素に関する理論を準備する必要があった．1929～1932 年にそれらの論文が出揃った後，本書が出版されたのである．なお von Neumann は量子論理にその後も関心を持ち続け，1936～7 年にかれが作り上げた，いわゆる「連続幾何学」(Continuous geometry) の一つの目標も，量子論の論理の基礎づけにあったこと，および Hilbert 空間論は，同じく von Neumann によってエルゴード理論や，位相群論等へ応用されたことを付言せねばならない．本書では，証明の細かい点は，*Math. Ann.* 102 巻の論文等に委ねられているところもあるが，概念構成や理論展開の見透しは，間然するところなく明快に述べられている．理論物理学の

最も重要な部門の一つがこのように整然と数学的に述べられているのは，数学者にとっても，この上なくありがたいことである．物理学においても，数学においても，その後の進歩もあるけれども，本書は古典としての高い価値を今日も保持し続けている．

井上，広重，恒藤三氏によるこの訳は，原文に忠実であると同時に，邦文としても読み易いよう，なみなみならぬ苦心が払われている．湯川博士とともに，訳者諸氏の労を感謝したいと思う．

1957年10月

目次

記　号　表

$\left.\begin{array}{l} f, \quad g, \cdots \\ \varphi, \quad \psi, \cdots \end{array}\right\}$ H. R. (ヒルベルト空間) の点

$a, b, \cdots x, y, \cdots$　　複素数.

(f, g)	内積
$\|f\|$	ノルム

$\mathfrak{R}$	H. R.
$\mathfrak{R}_\infty$	無限次元の H. R.
$\mathfrak{R}_n$	n 次元の H. R.

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots \mathfrak{M}, \mathfrak{N} \cdots$　H. R. の部分集合，とくに $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, は線型多様体.

$\{\mathfrak{A}\}$		$\mathfrak{A}$ によって張られる線型多様体.
$[\mathfrak{A}]$		$\mathfrak{A}$ によって張られる閉じた線型多様体.
$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\}$	:	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots$ によって張られる線型多様体.
$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots]$	:	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots$ によって張られる閉じた線型多様体.

F_Ω	:	波動函数の作る連続な函数空間.
F_Z	:	数列の作る函数空間.
Ω	:	連続な状態空間 (物理系の配位空間).
Z	:	指標の作る diskret な空間.

$A, \cdots R, S, \cdots$	:	H. R. の作用素.
$E, F, \cdots$	:	射影作用素.
$P_{\mathfrak{M}}$	:	$\mathfrak{M}$ の射影作用素.
$P_{[\varphi]}$	:	とくに状態 φ への射影作用素.

A^*	:	A にエルミート共役な作用素.
H	:	とくにハミルトン函数に対応するエルミート作用素.
$U, V, \cdots$	:	統計作用素.
$\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \cdots$	:	物理量
$R, S, T, \cdots$	:	それに対応するエルミート作用素.
$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \cdots$	:	とくに系の状態の性質.
$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{L}, \cdots$	:	物理系.
$[\boldsymbol{S}_1, \cdots \boldsymbol{S}_N]$	:	統計集団.

序　　　論

ここ数年の間に量子力学は，その本質的な部分においては確定的と思われる形，即ち「変換理論」と称せられている形をとるに到った．この本の目的は，この新しい量子力学を統一的に，しかも適切さを失わない範囲で可能なかぎり数学的に異論の余地なく記述することである．その際，この理論と関連して生じてきた一般的でしかも原理的な諸問題に重点がおかれるであろう．とりわけ解釈の問題が詳細に論じられるであろう．それは，これまで屢々論じられながら，いまなお徹底的に明らかにされていない，困難な問題である．とくに量子力学の統計および古典統計力学への関係がここで重要である．それに反して，量子力学的方法の個々の問題への応用を詳しく論ずることや，一般論から導かれてくる個々の特殊な理論に言及することは，原則として——少くとも一般的な連関の理解をおびやかさない範囲で——われわれの視野の外におくことにする．それは，これらの事柄について多くのすぐれた著述がすでにあるし，また出版されようとしているから，なおのこと許されるものと思われる[1]．

他方，この理論のために必要な数学的手段が明示されるだろう．すなわちヒルベルト空間およびその空間における，いわゆるエルミート作用素の理論である．その際，有界でない作用素をも厳密に取扱うこと，すなわちヒルベルト空間の理論を Hilbert ならびに E. Hellinger, F. Riesz, E. Schmidt, O. Toeplitz によってあたえられた，その古典的な範囲をこえて拡張することが必要となる．このような取扱い方のもつ方法論的特色について次のことを述べておかねばならないだろう．原則として，（物理量を表わす）作用素自身でもって計算されなければならない．つまり，ヒルベルト空間のなかに一つの（特定のそして任

1）ドイツ語で書かれたものとしては，とりわけつぎのような総括的な著述がある：Sommerfeld: *Ergänzungsband zur 4. Auflage. v. Atombau und Spektrallinien*, Braunschweig 1928. Weyl: *Gruppentheorie und Quantenmechanik.* Leipzig 1928, zweite Aufl. Leipzig 1931.〔山内恭彦訳.「群論と量子力学」1932. 裳華房〕. Frenkel: *Einführung in die Quantenmechanik.* Berlin 1929. Born und Jordan: *Elementare Quantenmechanik.* Berlin 1930. Dirac: *Prinzipien der Quantenmechanik* (Übers. v. W. Bloch). Leipzig 1931〔第3版邦訳：朝永振一郎，玉木英彦，木庭二郎，大塚益比古「量子力学」岩波書店 1954〕.

意の）座標系を導入して初めて作用素から得られる行列を用いて行うのではない．この幾何学的な傾向の強い“座標系から独立な”，即ち不変な取扱い方は，少なからぬ形式上の利点をともなっているのである．

いくつかの論文ならびに最近出版された本のなかで，Dirac は同じように不変性の性格をそなえた量子力学の叙述をあたえている[2]．それは簡けつさと優美さにおいて殆ど他の追従を許さない．それゆえ，Dirac のあたえたものとは本質的に異ったわれわれの方法論について，若干の議論を付け加えることは恐らく適切なことであろう．

うえにふれた Dirac の方法論は，その明晰さと優美さによって今日量子力学に関する大部分の文献にまさるものであるが，決して数学的厳密さの要求をみたしていない．——たとえ数学的厳密さの要求が理論物理学で普通行われている程度にまで当然かつ正当にゆるめられるとしても，その事情は変らない．だから，たとえば，あらゆる自己共役な作用素を対角形にすることができる，というフィクションが一貫してとられている．実際に対角化できないような作用素の場合には，このフィクションは自己矛盾する性格をもった“擬函数”の導入を必要とする．直観的には確立されている実験の結果を数学的に計算することだけが問題であるときですら，このような，数学的フィクションの挿入がさけられない場合がしばしばでてくる．もしこれらの，現在の解析学のわくにはまらない概念構成が，新しい物理学の理論にとって真に本質的なのであれば，それは何等反対さるべきものではなかろう．丁度ニュートン力学が当時の形態では明らかに自己矛盾していた無限小解析の発生を間もなくうながしたように，量子力学もわれわれの“無限に多くの変数の解析学”が新しく建設されることを示唆しているのではなかろうか——すなわち物理的理論でなく，数学的手段が変更されなければならないのではなかろうか．けれどもそれは全く事実からはずれている．むしろ変換理論が，明確かつ統一的なやり方で，しかも数学的にも不備なく基礎づける事ができることこそ注目すべきであろう．その際，次のことが強調されねばならない．正しい構成は，Dirac の方法を数学的に精密化し明確にすることによって行われるのではなく，それは，もともと異った手続き，すなわち Hilbert による作用素のスペクトル理論に依存するこ

---

2) Proc. Roy. Soc. London. Bd. **109** (1925) およびそれに続く論文，とくに Bd. **113** (1926) を参照． Dirac と独立に，P. Jordan: Z. Physik Bd. **40** (1926) および F. London: Z. Physik Bd. **40** (1926) は量子論の類似した基礎づけを行った．

とを要請する.

原理的な問題の分析に際して，とりわけどのようにして2，3の定性的な基本仮定から量子力学の統計的な公式を導きだすことができるかが明らかにされるであろう．さらに次の問題がくわしく論じられる．それは，量子力学の統計的性格をわれわれの自然の記述の多意性（すなわち不完全性）に帰することがはたして可能であるかどうかという問題である．この多意性による説明は，確率論的な主張がすべてわれわれの知識の不完全さから生ずるとする一般的な原理にもっともよく相応していると云えよう．“かくれたパラメーターによる”このような説明および，それに類似したもので，“かくれたパラメーター”を観測される系にではなく，観測者に帰する説明が，しばしば提出されてきている．しかしながら，これが満足しうる形では成功しがたいこと，もっと正確には，このような説明は量子力学の一定の定性的な基本的要請と両立しないことが明らかにされる[3].

このような統計の，熱力学との関係もまた考察されるだろう．熱力学の基礎づけに要求される“無秩序性の仮設”に関連した，古典力学でのよく知られた困難が，ここでは除去されうることが詳細な研究によって示される.[4]

3）IV 章をよび VI. 3 を参照.
4）V 章を参照.

I. 序論的考察

1. 変換理論の成立

量子理論が 1900 年から 1925 年にいたる期間のうちに達成した偉大な成果，それは Planck, Einstein そして Bohr の名によってかざられた発展の成果であるが，ここはそれについて述べるべきところではない[5]．この発展の結果，すべての素過程，すなわち，原子分子程度の大きさの領域におけるあらゆる事象が量子の“不連続的”な法則によって規制されていることが，疑う余地のないまで明らかに確証された．ほとんどあらゆる方面に量子論の方法が定量的に適用され，多くの場合それは経験とよく一致するか，或いは，大体一致する結果をあたえた．さらに，原理的に重要な意義をもつのは，理論物理学の研究において次の思想が一般的に受入れられたことであった：感覚される巨視的な世界を支配している連続の原理（“natura non facit saltus”〔自然は飛躍せず〕）は，本質においては不連続な世界の中で，たんに，平均化の過程によって浮び出るものにすぎない．すなわち人間が，多くの場合一度に莫大な数の素過程の総和を知覚しうるのみであるために，すべてを平均化してしまう大数の法則が個個の過程の真の性質を全くおおいかくしてしまうのである．

しかしながら，上述の時期には，当時までに知られていたすべての事柄を統一的に包括するような量子論の数学的・物理的体系は全く存在しなかった．まして，力学—電気力学—相対性理論という（量子的現象によって破かいされた）体系がもつ壮大な完結性を示しうるような体系はなおさらのことであった．量子論の普遍性への要求は明らかに是認できるものであったが，それにもかゝわらず，その要求に不可欠な形式的ならびに思考上の道具立てが欠けていた．量子論は，本質的に異った，独立で，たがいになじみあわない，しかも部

5） その主な段階はつぎのとおりである：Planck による，“黒体の”空洞輻射の場合における量子法則の発見（たとえば，Planck の著書“Wärmestrahlung”, Leipzig 1906, を参照）; Einstein による，光の粒子性の証明（光量子理論）（Ann Physik〔4〕Bd: **17**〔1905〕，そこで波動-粒子という二重性の最初の例があたえられた．今日われわれは，それが徴視的な物理学の全体を支配していることを知っている）; これら 2 つの法則性を原子模型にもちこむことが Bohr によってなされた; Fysisk Tidskr. Bd. **12** (1914); Z. Physik Bd. **6** (1920).

分的に矛盾しあうような要素がときほぐしがたく混り合ったものであった．もっとも注意をひくのは次の点であった：なかば古典力学と電気力学とに属する対応原理（これは事態の最後的な解明のさいに決定的な役割を演じた）および光の性質のもつ自己矛盾した二重性（波動と粒子，注 5 および注 148 参照），そして最後に量子化されていない（非週期性）運動と量子化された（週期性ないし多重週期性）運動の存在[6]．

1925 年になって解決がもたらされた．Heisenberg のあたえた手がかりは Born, Heisenberg, Jordan によって，そしてすぐそれに続いて Dirac によって，量子論の新しい体系に造りあげられることができた．それは物理学のものとなった最初の完結した量子論の体系である．それより少し遅れて Schrödinger は全く異った出発点から波動力学を見出した．それは同じ結果をあたえたし，まもなく，Heisenberg, Born, Jordan および Dirac の体系と同等なものであることが明らかにされた[7]．Dirac と Jordan はこの 2 つの理論を，Born による量子論的な自然記述[8]の統計的解釈にもとづいて，1 つの理論，"変換理論" に融合することに成功した[9]．この理論では，うえの 2 つの理論はたがいに補足しながら 1 つに結合され，物理的な問題を数学的にきわめて簡単にとりあつかうことが可能にされている．

なお（われわれの本来の目的からははずれるけれども），Goudsmit と Uhlenbeck によって電子の磁気モーメントおよび角運動量が発見されたいまでは，ほとんどすべての前期量子論の困難が消滅し，したがってわれわれはこんにち完全に満足しうる力学的体系を有していることを述べておこう．もちろんはじめにふれた電気力学および相対性理論との壮大な統一は，いまだにとりもどされてはいない．しかし少くとも，量子的法則性が自明の必然性をもってそのな

---

6) Epstein-Sommerfeld によって，多重週期性運動に対しては（力学的法則に附加わる）量子法則が知られていた（たとえば，Sommerfeld; *Atombau und Spektrallinien*, Braunschweig 1924 参照）．それに反して自由に運動する質点，あるいは双曲線軌道を描く遊星（楕円軌道にあるものと反対に）は "量子化されない" ことが確立された．量子論のこの発展段階はつぎの本のなかにあますところなく述べてある：Reiche: *Die Quantentheorie, ihre Ursprung und ihre Entwicklung*, Berlin, 1921. Landé: *Fortschritte der Quantentheorie*, Dresden 1922.

7) これは Schrödinger が証明した；Ann. Physik 〔4〕 Bd. **79** (1926)

8) Z. Physik Bd. **37** (1926)

9) 注 2) にあげられた論文参照．Schrödinger の論文は単行本として出版されている．*Abhandlungen zur Wellenmechanik*, Leipzig 1928.

かに組みこまれ，しかもわれわれの経験の大部分を満足に説明するような，一般的な力学が現に存在するのである[10]．

2. 量子力学の最初の定式化

あらかじめ方向を見定めるために，Heisenberg-Born-Jordan の“行列力学”および Schrödinger の“波動力学”において，原理的にどのような問題の設定が行われるかについてかんたんに述べようと思う．

これら2つの理論において，まず最初に，ハミルトン函数 $H(q_1, \cdots\cdots, q_k, p_1, \cdots\cdots, p_k)$ によって特徴づけられる古典力学の問題があたえられる．（これはいうまでもなく，力学の教科書に詳細に論じてあるように，つぎの事を意味する：系は k 個の自由度をもつ，すなわち，系のいかなる時刻における状態も，k 個の座標 $q_1 \cdots\cdots q_k$ の数値をあたえることによって定められる．エネルギーは座標とその時間微分のあたえられた函数である：

$$E = L(q_1, \cdots\cdots, q_k, \dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k)$$

しかも通例微分 $\dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k$ について2次の函数である．

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \cdots\cdots, \ p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

によって座標 $q_1, \cdots\cdots, q_k$ に“共役な運動量”$p_1, \cdots\cdots, p_k$ が導入される——L についてうえの仮定がある場合には，それは $\dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k$ に線型に依存する．いずれにしてもわれわれは $p_1, \cdots\cdots, p_k$ をもちいて L から $\dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k$ を消去することができる．そうすると，

$$E = L(q_1, \cdots\cdots, q_k, \dot{q}_1, \cdots\cdots, \dot{q}_k) = H(q_1, \cdots\cdots, q_k, p_1, \cdots\cdots, p_k)$$

となる．この H がハミルトン函数である．）どちらの理論においても，われわれはこのハミルトン函数から，その系の真の，すなわち量子論的な，ふるまいについて可能なかぎり多くの知識をつかみとることが許される[11]——したがっ

10）現在の事態はつぎの事実によって特徴づけられる．個々の電子あるいは原子または分子のなかの電子の殻を問題にするかぎりでは，この理論は完全に成功している．しかもそれは，静電気的な作用を取扱うときと同様に，光の生成，伝播および吸収の際の電磁的な過程を取扱うときにも，まったく満足すべきものである．それに反して原子核を取扱う場合や，一般的な相対論的電磁理論を建設しようとする試みにおいては，この理論は部分的には成果を収めているけれども，本質的に新しい考えなしには克服しがたい大きな困難にうちあたるように思われる．

11）古典力学的運動はよく知られているようにまったくハミルトン函数によって規定される．なぜならその函数は運動方程式

てまず第一に可能なエネルギー準位を決定すること，それからその準位に属する“定常状態”を知ること，その“遷移確率”を計算すること，等々，ができる[12].

これらの課題を解くために行列理論があたえる指示は次のようなものである：第1に

$$\left.\begin{array}{l} Q_mQ_n-Q_nQ_m \quad =0,\ \ P_mP_n-P_nP_m=0 \\ P_mQ_n-Q_nP_m\begin{cases} =0 & m\neq n\ \text{のとき}, \\ =\dfrac{h}{2\pi i}1 & m=n\ \text{のとき}, \end{cases} \end{array}\right\}\quad (m,\ n=1,\cdots\cdots,k)$$

という関係をみたし，第2に $W=H(Q_1,\cdots\cdots,Q_k,\ P_1,\cdots\cdots,P_k)$ という行列が対角行列になるような，$2k$ 個の行列 $Q_1,\cdots\cdots,Q_k,\ P_1,\cdots\cdots,P_k$ の系をもとめる[13]（これらの式の由来，とりわけ第1の組のもの，すなわち，この理論にあらわれる交換可能でない（非可換な）行列演算のすべてを支配する，いわゆ

$$\dot{q}_l=\frac{\partial H}{\partial p_l},\ \ \dot{p}_l=-\frac{\partial H}{\partial q_l}\quad (l=1,\cdots\cdots,k)$$

をあたえるからである．量子力学が発見される前に，この運動方程式はそのままにしておいて，“量子条件”を附加することによって量子論的現象を把握しようという試みがなされた（注6参照）．この運動方程式は，$t=0$ という時間にあたえられた，$q_1,\cdots\cdots,q_k,$ $p_1,\cdots\cdots,p_k$ の値の組の各々に対して $2k$ 次元の“位相空間”のなかの系の軌道を決定する．だから，あらゆる附加条件はすべての可能な初期値ないしは軌道を，ある一定のかぎられた部分に制限することになる（そのときには少数の許された軌道に対応してエネルギー準位も，かぎられたものだけが可能になる）．たとえ量子力学がこのような手続きとは無関係になってしまったとしても，ハミルトン函数が量子力学のなかでもまた大きな役割を演ずるはずであることはもともと明らかである．というのは，あらゆる経験からして，Bohr の対応原理の有効さが証明されているからで，それは量子論が高い量子数をもったいわゆる極限の場合には古典力学と一致した結果を与えねばならないことを主張する．

12) この3つの概念構成は，量子論のうちで，主として N. Bohr によって発展させられた，前期量子論的な思想の範囲から引出されたものである．われわれは後にそれを量子力学的な立場からもっと詳しく分析するであろう．Ⅲ. 6 に述べる Dirac の光の理論を参照．1913 年から 1916 年にかけての Bohr の原子構造についての論文は，それらの概念をその歴史的な連関のうちに描きだしてある（H. Stintzing によるドイツ訳 Braunschweig, 1921）．

13) げんみつな数学的分析から明らかになるように，必然的に無限行列が問題となる．われわれは後にこのような行列の性質をきわめて詳細に考察するであろうから，ここではそれに立ち入らないことにする．さしあたり，これらの行列の形式的，代数的演算は，行列の加算および掛算のよく知られた規則の意味に理解すべきことで十分である．とくに 0, 1 はゼロ行列および単位行列とする（それぞれ，すべての要素がゼロである行列および，対角要素が1でそれ以外はゼロである行列）．

る“交換関係”の由来についてはここでは立ち入って論じないことにする．この点に関しては，読者は注1に引用された研究が余すところなく論じているのを見出すであろう．h はプランクの作用量子である）．そうすると W の対角要素，$w_1, w_2, \cdots\cdots,$ はその系の可能な種々のエネルギー準位である．行列 $Q_1, \cdots\cdots, Q_k$ の要素——$q_{mn}^{(1)}, \cdots\cdots, q_{mn}^{(k)}$——は，ある一定の方式で，系の遷移確率（エネルギー w_m をもつm番目の状態からエネルギー w_n をもつ n 番目の状態への遷移確率，但し $w_m > w_n$）およびそのさいに放出される輻射を決定する．

なおつぎのことを補足しておかなければならない．

$$W = H(Q_1, \cdots\cdots, Q_k,\ P_1, \cdots\cdots, P_k)$$

という行列は，Q_l と P_l が（掛算のさいに）おたがいにすべて交換するのでないかぎり，$Q_1, \cdots\cdots, Q_k,\ P_1, \cdots\cdots, P_k$ および古典力学のハミルトン函数 $H(q_1, \cdots\cdots, q_k,\ p_1, \cdots\cdots p_k)$ によって完全には決定されない．——それに反して，古典力学の意味における $H(q_1, \cdots\cdots, q_k,\ p_1, \cdots\cdots, p_k)$ のときには，たとえば p_1q_1 という項と q_1p_1 という項を区別することは，まったく無意味であろう．したがって H については，その表現の古典的な意味をこえて，その各項に含まれる因数 q_l および p_l の順序を確定しなければならない．この手続きは，完全に一般的な形ではまったく行われていない．けれどももっとも重要な個々の場合にたいしては，有効な規準が知られている（問題にしている系が ν 個の粒子からなっており，したがって $k=3\nu$ 個の座標 $q_1, \cdots\cdots, q_{3\nu}$ をもつという簡単な場合において，——それゆえたとえば

$$q_{3\mu-2},\ q_{3\mu-1},\ q_{3\mu}\quad \mu=1, \cdots\cdots, \nu$$

はμ番目の粒子の3つのデカルト座標である——それらの粒子のあいだの相互作用がポテンシャルエネルギー $V(q_1, \cdots\cdots, q_{3\nu})$ であたえられるときには，もちろんうえのような疑点は生じない．そのときには古典的なハミルトン函数は

$$H=(q_1, \cdots\cdots, q_{3\nu},\ p_1, \cdots\cdots, p_{3\nu}) = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{2m_\mu}(p_{3\mu-2}^2 + p_{3\mu-1}^2 + p_{3\mu}^2) + V(q_1, \cdots\cdots, q_{3\nu})$$

となる．ここで m_μ はμ番目の粒子の質量であり，$p_{3\mu-2}, p_{3\mu-1}, p_{3\mu}$ はその運動量である．行列 $Q_1, \cdots\cdots, Q_{3\nu},\ P_1, \cdots\cdots, P_{3\nu}$ を代入したとき，これがどのようなものを意味するかは，まったく明らかである．とりわけすべての $Q_1, \cdots\cdots, Q_{3\nu}$ がおたがいに交換可能であるから V の項はいかなる困難もひきおこさな

い). 重要なことは，ただエルミート行列だけが許されること，すなわち，$A=\{a_{mn}\}$ という行列で，$a_{mn}=\bar{a}_{nm}$ が成立するようなもののみが許されることである（要素 a_{mn} は複素数であってもよい!!). それゆえ $H(Q_1\cdots\cdots Q_k,$ $P_1\cdots\cdots P_k)$ は，$Q_1\cdots\cdots Q_k$, $P_1\cdots\cdots P_k$ がすべてエルミートであるとき，やはりエルミートでなければならない. ——このことは，すぐうえでふれた Q_l や P_l の順序の問題に一定の条件を課するが，もちろんそれは古典的な $H(q_1\cdots\cdots q_k,\ p_1\cdots\cdots p_k)$ から $H(Q_1\cdots\cdots Q_k,\ P_1\cdots\cdots P_k)$ を一義的に決定するにたるほどせまいものではない[14).]——

他方において，波動力学の指示するところはつぎのとおりである：まず最初にハミルトン函数 $H(q_1\cdots\cdots q_k,\ p_1\cdots\cdots p_k)$ をつくる，それから系の状態空間のなかの（位相空間のなかではない，すなわち，$p_1\cdots\cdots p_k$ は ψ のなかに入ってはならない!!）1つの任意の函数 $\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ にたいして微分方程式

$$H\left(q_1,\cdots\cdots,q_k,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1},\cdots\cdots,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k)=\lambda\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k)$$

をおく．そのさい

$$H\left(q_1,\cdots\cdots,q_k,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1},\cdots\cdots,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

はやさしい意味での函数的作用素として把握さるべきものである．たとえば，これはうえにとりあげた場合には

$$H(q_1,\cdots\cdots,q_{3\nu}.\ p_1,\cdots\cdots,p_{3\nu})$$
$$=\sum_1^{\nu}\frac{1}{2m_\mu}(p_{3\mu-2}{}^2+p_{3\mu-1}{}^2+p_{3\mu}{}^2)+V(q_1,\cdots\cdots,q_{3\nu})$$

であり，$\psi(q_1,\cdots\cdots,q_{3\nu})$ という函数を

---

14) Q_1, P_1 がエルミートであるとき，Q_1P_1 および P_1Q_1 はまたエルミートである必要はないが，しかし $\frac{1}{2}(Q_1P_1+P_1Q_1)$ はつねにエルミートである．しかし，$Q_1{}^2P_1$ の場合には $\frac{1}{2}(Q_1{}^2P_1+P_1Q_1{}^2)$ とともに $Q_1P_1Q_1$ も問題になってくる（もちろん $P_1Q_1-Q_1P_1=\frac{h}{2\pi i}1$ のときにはこの2つの表式は偶然等しい）；$Q_1{}^2P_1{}^2$ の場合には，$\frac{1}{2}(Q_1{}^2P_1{}^2+P_1{}^2Q_1{}^2)$, $Q_1P_1{}^2Q_1$, $P_1Q_1{}^2P_1$ 等々．（このときには，上にあげた特殊な場合にもこれらの表式はすべて同じにはならない）．後に展開する作用素の理論によってこの関係をずっと明瞭に見わたすことができるようになるから，これについてさらに詳しく論じないことにする．

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{2m_\mu}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial q_{3\mu-2}{}^2}\psi+\frac{\partial^2}{\partial q_{3\mu-1}{}^2}\psi+\frac{\partial^2}{\partial q_{3\mu}{}^2}\psi\right)+V\psi$$

に変える（V および ψ のなかの変数 $q_1\cdots\cdots q_{3\nu}$ は省略した）．$q_1\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q_1}$ という演算は $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q_1}q_1$ という演算と異っているから[15]，ここでもまた $H(q_1,\cdots\cdots,q_k,p_1,\cdots\cdots,p_k)$ のなかの因子 q_m と p_m の順序による不定さが現われる——しかし Schrödinger は，どのようにしてこの不定さが一定の変分原理に還元することによって除去されうるかを，しかもそうして得られる微分方程式が自已共役的になるような形で行うことができるかを示した[16]．

さてこの微分方程式（"波動方程式"）は完全に固有値問題の性格をそなえている．たしかに，λ を固有値のパラメーターとみなし，固有函数 $\psi=\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k)$ にたとえばその状態空間（$q_1,\cdots\cdots,q_k$ の空間）の境界で消えるという条件を——およびその空間のなかでの正則性と一意性とを——課することによって，固有値問題となる．波動論では，λ のとる固有値は（点スペクトルにおいても連続スペクトルにおいても[17]）可能なエネルギー準位という意味をもっている．そしてまた，それに属する（複素）固有函数 ψ は，系のそれに対応する（Bohr の意味における定常な）状態と関連している：だから ν 個の電子の系で（うえにのべたように $k=3\nu$，e は電子の電荷とする），x, y, z という点で測った，系の μ 番目の電子の電荷はつぎの表式であたえられる．それは Schrödinger によると x, y, z ($q_{3\mu-2}, q_{3\mu-1}, q_{3\mu}$) 空間全体にわたってぬりひろげられていると考えらるべきものである．

$$e\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{(3\nu-3)\text{重}}|\psi(q_1\cdots\cdots q_{3\mu-3}, x, y, z, q_{3\mu+1}\cdots\cdots q_{3\nu})|^2dq_1\cdots\cdots dq_{3\mu-3}dq_{3\mu+1}\cdots\cdots dq_{3\nu}.$$

---

15)
$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}(q_1\psi)=q_1\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}\psi+\frac{h}{2\pi i}\psi$$
である．それ故，1 を単位作用素（ψ をそれ自身に移すもの）とすると，
$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}\cdot q_1-q_1\cdot\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}=\frac{h}{2\pi i}1$$
がえられる．すなわち $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q_1}$ と q_1 とは，行列 P_1 および Q_1 と同じ交換関係をみたす．

16) 注 9) にあげられた本の中の彼の最初の 2 つの論文を参照〔Ann. Phys (4) Bd 79 (1926)〕

17) 注 16) にあげられた Schrödinger の研究の最初のものを参照．われわれは II.6 から 9 においてはじめてスペクトルおよびその部分をげんみつに定義するであろう．

（全電荷が e となるためには，ψ は

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{3\nu\text{重}}|\psi(q_1\cdots\cdots q_{3\nu})|^2dq_1\cdots\cdots dq_{3\nu}=1$$

〔積分は 3ν 個の変数全部について〕

という条件によって規格化されなければならない．しかもうえと同じ式は $\mu=1,\cdots\cdots,\nu$ のすべての場合に現われる.）

また波動力学は，Bohr の定常状態にない系にたいしても適用することができる[18]．実際つぎのように適用される：もし状態が定常なものでないならば，すなわち時間とともに変化するのであれば，波動函数 $\psi=\psi(q_1\cdots\cdots q_k;\ t)$ は時間 t を含む，そしてそれは微分方程式

$$-H\left(q_1,\cdots\cdots q_k,\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1},\cdots\cdots,\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k;\ t)$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k;\ t)$$ [19]

にしたがって変化する．ということは，$t=t_0$ において ψ を任意にあたえることができ，そして一度あたえれば ψ はすべての t にたいして一義的に決定されるということである．定常的な ψ も，Schrödinger の2つの微分方程式をくらべればわかるように，もともと t に依存するのであるが，このときには t は

$$\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k;\ t)=e^{-\frac{2\pi i}{h}\lambda t}\psi(q_1,\cdots\cdots,q_k;\ 0)$$

という形で入っている．すなわち，t はたんに，$q_1\cdots\cdots q_k$ から独立な（云いかえると状態空間のなかで不変な），絶対値が1に等しい因子のなかに現われるのみであり，したがってたとえばうえに定義した電荷密度の分布は変化しないのである．（ψ における絶対値が1の〔状態空間で〕不変な因子は原理的に観測不可能であることは，一般に推測されるであろう――事実われわれはそのことがのちに厳密な考察によって証明されるのを見るであろう.）

第一の微分方程式の固有函数は完全直交系を作るから[20]，われわれはすべての $\psi=\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ をそれらの函数によって展開することができる．固有函

18）行列力学の最初の形態においては（うえに詳しく述べた所を参照），このような，定常状態がその特殊な場合であるような，一般的な状態概念は存在しなかった．エネルギーの固有値に対応した，定常な状態のみがこの理論の対象であった．

19）$H=H(q_1,\cdots\cdots,q_k,\ p_1,\cdots\cdots,p_k)$ には時間 t もあからさまに含まれてよい．当然そのときには定常状態は一般に決して存在しないであろう．

20）たゞし点スペクトルのみが存在する場合に，II.6 参照.

数を $\psi_1, \psi_2\cdots\cdots$ (すべてこれらも t に依存しない!!) とし，それらの各々の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ とすると，この展開はつぎのとおりになる：

$$\psi(q_1, \cdots\cdots, q_k)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(q_1, \cdots\cdots, q_k)^{21)}.$$

もし ψ が t に依存するのであれば，t は展開の係数 a_n のなかに入るであろう (それに反して固有函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ はこの場合と同じく以下においてもつねに t には依存しないとしておく). それゆえ，もしも問題にしている $\psi=\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ がほんとうは $\psi(q_1\cdots\cdots q_k;\ t_0)$ であるとすると，

$$\psi=\psi(q_1, \cdots\cdots, q_k;\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\psi_n,$$

$$H\psi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)H\psi_n=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n(t)\psi_n,$$

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h}{2\pi i}\dot{a}_n(t)\psi_n$$

であることを考慮に入れて，第2の微分方程式から，係数の比較によってつぎの式が導かれる：

$$\frac{h}{2\pi i}\dot{a}_n(t)=-\lambda_n a_n(t),\quad a_n(t)=c_n e^{-\frac{2\pi i}{h}\lambda_n t}$$

すなわち

$$a_n(t)=e^{-\frac{2\pi i}{h}\lambda_n(t-t_0)}a_n(t_0)=e^{-\frac{2\pi i}{h}\lambda_n(t-t_0)}a_n,$$

$$\psi=\psi(q_1, \cdots\cdots, q_k;\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi i}{h}\lambda_n(t-t_0)}a_n\psi_n(q_1, \cdots\cdots, q_k).$$

したがって，もしも ψ が定常でなければ，すなわち，1つを残してすべての a_n が消えるのでなければ，ψ は (t が変化するとき) もはや絶対値が1の (状態空間のなかで) 不変な因子だけを通して変化するのではなくなる. それゆえ一般にはうえに定義した電荷密度も変化するであろう，云いかえると空間のなかに実際に電気的な振動が生ずる[22].

21) これらの級数展開は，以下すべてそうであるが，“平均において”収斂する. これについてはⅡ.2 で詳細に論ずる.

22) 定常状態に対してこのような振動が，まさしくこのようなものだけが，存在しないということは，Bohr が 1913 年に立てたもっとも重要な基本的要請の一つであった. 古典電気力学はこのことと矛盾している.

2つの理論の概念構成および実際の処方はかなり異った内容をもつように見える．にもかかわらずそれらは初めからいつも同じ結果を，しかも両者が古い形態の量子論からはずれる細かい点においてすら，同じ結果をあたえたのである[23]．この注目に価する事実は，I.1.に述べたように，まもなく Schrödinger による両者の数学的同等性の証明によって説明された[24]．ここでこの同等性の証明に向おうと思う．そしてそのさい同時に（この2つの理論を包括する）Dirac-Jordan の一般的な“変換理論”を展開することにしよう．

3. 両理論の同等性：変換理論

行列力学の中心問題は，行列 $Q_1, \cdots\cdots, Q_k, P_1, \cdots\cdots, P_k$ をつぎのように定めることである．すなわち，まずそれらが I.2 の交換関係（7頁）を満足するようにし，つぎに，それらのある函数 $H(Q_1, \cdots\cdots, Q_k, P_1, \cdots\cdots, P_k)$ を対角行列にする．Born と Jordan とはその最初の報告でこれらの問題をつぎのように2つの段階に分けた：

第一に，ほかになんの条件もつけずに交換関係を満す任意の行列 $\bar{Q}_1, \cdots\cdots, \bar{Q}_k, \bar{P}_1, \cdots\cdots, \bar{P}_k$ を探しだす．これは容易におこなえるが[25]，そのさい

$$\mathsf{H}=H(\bar{Q}_1, \cdots\cdots, \bar{Q}_k, \bar{P}_1, \cdots\cdots, \bar{P}_k)$$

は一般に対角行列ではない．そこで正しい解を

$$Q_1=S^{-1}\bar{Q}_1S, \cdots\cdots, Q_k=S^{-1}\bar{Q}_kS, \quad P_1=S^{-1}\bar{P}_1S, \cdots\cdots, P_k=S^{-1}\bar{P}_kS$$

の形におく．ここで S は任意の行列であって（$S^{-1}S=SS^{-1}=1$ という性質をもつ逆行列 S^{-1} はつねに存在するとする）$\bar{Q}_1, \cdots\cdots, \bar{Q}_k, \bar{P}_1, \cdots\cdots, \bar{P}_k$ に対して交換関係が成り立つことから，$Q_1, \cdots\cdots, Q_k, P_1, \cdots\cdots, P_k$ に対しても同様の交換関係が導かれ（S によらず!），また

$$\mathsf{H}=H(\bar{Q}_1, \cdots\cdots, \bar{Q}_k, \bar{P}_1, \cdots\cdots, \bar{P}_k)$$

は

$$\mathsf{H}=S^{-1}\overline{\mathsf{H}}S$$

によって

$$\mathsf{H}=H(Q_1, \cdots\cdots, Q_k, P_1, \cdots\cdots, P_k)$$

に移るから[26]，S については単に与えられた H に対して

23）注 16）にあげた Schrödinger の研究の第2番目のものを参照．

24）注 7）を参照．

25）例えば，注 1）にあげた Born と Jordan の本の §§20, 23 をみよ．

26）　$S^{-1}1S=1, \quad S^{-1}\cdot aA\cdot S=a\cdot S^{-1}AS$

$$S^{-1}\bar{\mathrm{H}}S$$

が対角行列となることを要求するだけでよい（もちろん，$\bar{Q}_1$ 等がエルミートならば $S^{-1}\bar{Q}_1S$ もエルミートになるように配慮しなければならない．しかし，よく調べてみると，S に対するそのような要求はつねにあとから追加することができるから，いまのように大体の見通しをたてるだけの目的には考慮せずにおいてよいことがわかる）．

こうして与えられた $\bar{\mathrm{H}}$ は規則

$$S^{-1}\bar{\mathrm{H}}S$$

によって対角型に変換することができる．ところで，このことは一体何を意味するのであろうか，それを正確に定式化してみよう．

行列 $\bar{\mathrm{H}}$ の要素を $h_{\mu\nu}$，求める行列 S の要素を $s_{\mu\nu}$，また（同じく未知の）対角行列 H の対角要素を w_μ，すなわち，一般の要素が $w_\mu\delta_{\mu\nu}$ であるとする[27]．

$$\mathrm{H}=S^{-1}\bar{\mathrm{H}}S$$

は

$$S\mathrm{H}=\bar{\mathrm{H}}S$$

と同じことであるが，この式は（よく知られた行列の乗法規則によって求められる両辺の要素の対応するものどうしを等しいとおいて）

$$\sum_\nu s_{\mu\nu}\cdot w_\nu\delta_{\nu\rho}=\sum_\nu h_{\mu\nu}\cdot s_{\nu\rho},$$

すなわち

$$\sum_\nu h_{\mu\nu}\cdot s_{\nu\rho}=w_\rho\cdot s_{\mu\rho}$$

を意味する．したがって，行列 S の各列 $s_{1\rho}$, $s_{2\rho}$, ……$(\rho=1, 2, \ldots\ldots)$ および行列 H のそれに対応する対角要素 w_ρ は，

$$S^{-1}\cdot(A+B)\cdot S=S^{-1}AS+S^{-1}BS,\quad S^{-1}\cdot AB\cdot S=S^{-1}AS\cdot S^{-1}BS$$

によって，任意の行列多項式 $P(A, B, \ldots\ldots)$ に対して

$$S^{-1}P(A, B, \ldots\ldots)S=P(S^{-1}AS, S^{-1}BS, \ldots\ldots)$$

が成り立つ．P として交換関係の左辺をとれば，これから交換関係の不変性がでてくる．また P として H をとれば

$$S^{-1}\bar{\mathrm{H}}S=\mathrm{H}$$

が得られる．

27) $\delta_{\mu\nu}$ はよく知られた Kronecker-Weierstrauss の記号で

$$\mu=\nu \text{ に対して}\quad \delta_{\mu\nu}=1,$$
$$\mu\neq\nu \text{ に対して}\quad \delta_{\mu\nu}=0.$$

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_{\nu} = \lambda \cdot x_{\mu} \quad (\mu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

という固有値問題の解になっている（いうまでもなく，$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = 0$ という解はたいした意味をもたないから捨てる）．実際 $x_{\nu} = s_{\nu\rho}$, $\lambda = w_{\rho}$ は1つの解である（$x_{\nu} \equiv 0$, すなわち〔すべての ν に対し〕$s_{\nu\rho} \equiv 0$ は問題にならない．もしこれが解だとすると，S には逆行列 S^{-1} があるにもかかわらず S の ρ 番目の列は恒等的に零だということになるからである）．ここで注目すべきことは，本質的には，これが唯一の解だということである．

なぜかというと，うえの式はベクトル

$$x = \{x_1, \ x_2, \ \cdots\cdots\}$$

を行列 $\bar{\mathsf{H}}$ で変換したものは，そのベクトルの λ 倍に等しいということを表わしている．

$$x = \{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$$

を S^{-1} で変換してベクトル

$$y = \{y_1, y_2, \cdots\cdots\}$$

を得るとする．y を H で変換することは，x を

$$\mathsf{H}S^{-1} = S^{-1}\bar{\mathsf{H}}S \cdot S^{-1} = S^{-1}\bar{\mathsf{H}}$$

で，すなわち，λx を S^{-1} で変換することであり，その結果は λy となる．ところで $\mathsf{H}y$ の成分は

$$\sum_{\nu} w_{\mu} \delta_{\mu\nu} y_{\nu} = w_{\mu} y_{\mu}$$

であり，λy の成分は λy_{μ} である．したがって，すべての $\mu = 1, 2, \cdots\cdots$ に対して，

$$w_{\mu} y_{\mu} = \lambda y_{\mu}$$

であることが要求されるが，これは $w_{\mu} \neq \lambda$ であるかぎり $y_{\rho} = 0$ を意味する．そこで，ρ 番目の成分だけが1で他がすべて0であるようなベクトルを η^{ρ} と書けば，y は $w_{\rho} = \lambda$ であるような η^{ρ} の1次結合であり，もしそのような w_{ρ} がなければ y は零である．x は y に S をほどこして得られるのであるから，η^{ρ} を S で変換したものの1次結合となる．$S\eta^{\rho}$ の μ 番目の成分は（η^{ρ} の ν 番目の成分が $\delta_{\nu\rho}$ だったから）

$$\sum_{\nu} s_{\mu\nu} \delta_{\nu\rho} = s_{\mu\rho}$$

である．そこで，S の ρ 番目の列

$$s_{1\rho},\ s_{2\rho}\cdots\cdots$$

をベクトルのようにみなせば，x は，$w_\rho=\lambda$ であるようなすべての列の1次結合である，——とくにそのような w_ρ がなければ0である．こうして，われわれの本来の主張，すなわち，

$$w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots$$

は唯一の固有値であり，

$$x_\nu=s_{\nu\rho},\quad \lambda=w_\rho$$

が本質的には唯一の解である，ということが証明された．

このことは極めて重要である．というのは，S と H とについての知識から固有値問題のすべての解が定まるだけでなく，逆に又，固有値問題が完全に解けたならば，S と H を定めることができるからである．例えば H については，w_μ はすべて解 λ であり，各 λ が数列 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ のなかに現われる回数は，それぞれに属する1次独立な解 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ の数に等しいから[28]，$w_1, w_2, \cdots\cdots$ はその順番を別とすれば確定してしまうのである[29]．

したがって，行列力学の中心問題は固有値問題

E_1. $$\sum h_{\mu\nu}x_\nu=\lambda\cdot x_\mu \qquad (\mu=1,2,\cdots\cdots)$$

を解くことである．

つぎに波動力学へ移ろう．この理論の基礎方程式は波動方程式

E_2. $$H\varphi(q_1,\cdots\cdots,q_k)=\lambda\cdot\varphi(q_1,\cdots\cdots,q_k)$$

である．ここで H はまえに述べた微分作用素である．任意の λ に対して，$\varphi(q_1,\cdots\cdots,q_k)\equiv 0$ というつまらない解をのぞくすべての解 $\varphi(q_1,\cdots\cdots,q_k)$ と λ を求めるのである．これは E_1 における問題と類似している．そこでの数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ は ν を不連続変数とする（変数の値 1, 2, ……）函数とみなすことができるが，これは“連続”な変数 $q_1\cdots\cdots q_k$ の函数 $\varphi(q_1,\cdots\cdots,q_k)$ に対応する．λ の役割はどちらでも同じである．ただ，1次変換

$$x_\mu\to\sum_\nu h_{\mu\nu}x_\nu$$

と他方における

---

28) $w_\rho=\lambda$ であるような S の第 ρ 列 $s_{1\rho}, s_{2\rho}\cdots\cdots$ は解の完全系をつくり，しかもそれらは逆をもつ行列の列であるから，たがいに独立でなければならない．

29) S の列を好きなようにいれ換え，S^{-1} の行にもそれに対応したいれ換えをほどこせば H の対角要素も同じように並び換わるから，$w_1, w_2, \cdots\cdots$ の順番は事実上不確定である．

$$\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k) \to H\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)$$

とはほとんど似かよっていない．どうやって，ここに類比を見出すべきであろうか?

われわれは指標νを変数とみなし，それをk個の変数 $q_1, \cdots\cdots, q_k$ と並列させた．すなわち，ある正の整数をk次元の状態空間（以後 Ω とよぶ）のある点に対置したのだった．だから，$\sum\limits_{\nu}$は Ω における和へほん訳されると考えるべきではない．それに正しく対比されるのは積分

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\cdots\cdots dq_1\cdots\cdots dq_k$$

（あるいは dv をΩに対する体積要素 $dq_1\cdots\cdots dq_k$ として

$$\int_{\Omega}\cdots\cdots dv)$$

である．したがって，2つの変数——指標μとν——に依存する行列要素 $h_{\mu\nu}$ に対応するのは，函数

$$h(q_1, \cdots\cdots, q_k\,;\ q_1', \cdots\cdots, q_k')$$

であり，その変数 $q_1\cdots\cdots q_k$ および $q_1'\cdots\cdots q_k'$ はたがいに独立に Ω のなかを動く．これによって変換

$$x_\mu \to \sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu \quad \text{あるいは} \quad x_\nu \to \sum_{\nu'} h_{\nu\nu'} x_{\nu'}$$

は

$$\psi(q_1, \cdots\cdots, q_k) \to \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} h(q_1, \cdots, q_k\,;\ q_1', \cdots, q_k')\varphi(q_1', \cdots, q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k'$$

に移行し，

E_1.
$$\sum_{\nu'} h_{\nu\nu'} x_{\nu'} = \lambda\cdot x_\nu$$

と書き直すこともできる固有値問題 E_1. は，

E_3.
$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} h(q_1\cdots\cdots q_k : q_1'\cdots\cdots q_k')\varphi(q_1'\cdots\cdots q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k' = \lambda\cdot\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$$

に移行する．E_3. のような固有値問題は数学でしばしば研究されており，実際 E_1. の問題と類比的にとり扱える部分は非常に大きい．それは“積分方程式”(Integralgleichung) とよばれている[30]．

30) 積分方程式の理論の確定的な形は Fredholm と Hilbert とによるものである．

しかし残念ながら E_2. はこの形をしていないし，この形に直すことができるのも，微分作用素

$$H=H\left(q_1, \cdots\cdots, q_k, \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots\cdots, \frac{k}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

に対して恒等的に（すなわち，すべての $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ に対して）

I $\quad H\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$

$$=\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} h(q_1\cdots\cdots q_k;\ q_1'\cdots\cdots q_k')\varphi(q_1'\cdots\cdots q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k'$$

が成り立つような函数 $h(q_1\cdots\cdots q_k;\ q_1'\cdots\cdots q_k')$ を見出すことができる場合だけである．ちなみに，この

$$h(q_1\cdots\cdots q_k;\ q_1'\cdots\cdots q_k')$$

が存在するときそれは，函数的作用素 H の“積分核”(Integralkern) とよばれ，H 自身は積分作用素 (Integraloperator) とよばれる．

さて，うえのような変形は一般には不可能である．すなわち，微分作用素 H はけっして積分作用素でないのである．各 φ をそれ自身に移すという最も単純な函数的作用素——それを $\mathbf{1}$ で表わす——でさえそうである．簡単のため $k=1$ として，このことを確めよう．

$\Delta_1.$ $$\varphi(q)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}h(q, q')\varphi(q')dq'$$

であることが要求されるのであるが，ここで $\varphi(q)$ を $\varphi(q_0+q)$ でおきかえて $q=0$ とおき，さらに積分変数として $q''=q-q_0$ を導入する．そうすると

$$\varphi(q_0)=\int_{-\infty}^{\infty}h(0, q''-q_0)\varphi(q'')dq''$$

となる．q_0, q'' を q, q' と書きかえれば，われわれの問題は $h(q, q')$ によっても $h(0, q'-q)$ によっても解ける．したがって，$h(q, q')$ は $q'-q$ だけに依存すると仮定してよい，ということがわかる．そこでわれわれの問題は，

$\Delta_2.$ $$\varphi(q)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}h(q'-q)\varphi(q')dq' \qquad (h(q, q')=h(q'-q))$$

となる．ふたたび $\varphi(q)$ を $\varphi(q_0+q)$ でおきかえてみればわかるように，$q=0$ の場合を考えれば十分であるから，

それを文献もあげて，残すところなく叙述してあるのは Courant-Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik* Bd. I. Berlin 1931

$\varDelta_3$. $$\varphi(0)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}h(q)\varphi(q)dq.$$

$\varphi(q)$ を $\varphi(-q)$ でおきかえれば，$h(q)$ と同じく $h(-q)$ も解であることがわかるから，

$$h_1(q)=\frac{h(q)+h(-q)}{2},$$

もまた解である．したがって，$h(q)$ は q の偶函数でなければならない．

これらの条件がみたされないものであることは明らかである．

$$q\gtrless0 \quad \text{に対して} \quad \varphi(q)>0,\ \varphi(0)=0$$

のように $\varphi(q)$ を選べば，$\varDelta_3$. から

$$q\gtrless0 \quad \text{に対し} \quad h(q)=0$$

となる[31]．しかるに，$\varphi(q)\equiv1$ と選べば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(q)dq=1$$

となる．——他方うえの結果から確かに

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(q)dq=0$$

でなければならない．

それにもかかわらず，Dirac は，

$\varDelta_4$. $$q\gtrless0 \quad \text{に対して} \quad \delta(q)=0,\ \delta(q)=\delta(-q),\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(q)dq=1$$

をみたすような函数の存在を仮想した．それが存在するとすれば $\varDelta_3$ をみたし，したがってまた $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ をみたす：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q)\varphi(q)dq=\varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q)dq+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q)(\varphi(q)-\varphi(0))dq$$

$$=\varphi(0)\cdot1+\int_{-\infty}^{\infty}0\cdot dq=\varphi(0).$$

それは点ゼロをのぞいていたるところゼロとなり，しかも点ゼロでは無限大であって，$\delta(q)$ を全区間にわたって積分すればちょうど 1 となるものでなければならない[32]．

---

31) より正確に云えば，Lebesgue の意味での積分概念を使うとして測度 0 の集合をのぞいて，$q\gtrless0$ に対して $\varphi(q)=0$，すなわち，そのような集合をのぞいて恒等的に $\varphi(q)\equiv0$.

32) したがって $\delta(q)$ のグラフは $q=0$ において，無限に細く無限に高い面積 1 の尖

ひとたびこのようなフィクションを受入れるならば，$\delta(q)$ のほかにそれの微係数を導入することによって，種々の微分作用素を積分作用素として表わすことができる．すなわち

$$\frac{d^n}{dq^n}\varphi(q)=\frac{d}{dq^n}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q-q')\varphi(q')dq'=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^n}{\partial q^n}\delta(q-q')\cdot\varphi(q')dq'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(n)}(q-q')\varphi(q')dq',$$

$$q^n\varphi(q)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(q-q')q^n\cdot\varphi(q')dq'$$

であるから，$\frac{d^n}{dq^n}$，q^n に対する積分核はそれぞれ $\delta^{(n)}(q-q')$，$\delta(q-q)q^n$ である．同様の規則によって，どんなにこみいった微分作用素の積分核も求められる．多変数 $q_1, \cdots\cdots, q_k$ のときは δ の積によって目的が達せられる．例えば，

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\cdots\cdots\delta(q_k-q_k')\varphi(q_1'\cdots\cdots q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigl[\cdots\cdots\Bigl[\int_{-\infty}^{\infty}\Bigl[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q_1'q_2'\cdots\cdots q_k')\delta(q_1-q_1')dq_1'\Bigr]\delta(q_2-q_2')\,dq_2'\Bigr]\cdots\cdots\Bigr]$$

$$\cdot\delta(q_k-q_k')dq_k'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigl[\cdots\cdots\Bigl[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q_1'q_2'\cdots\cdots q_k')\delta(q_2-q_2')dq_2'\Bigr]\cdots\cdots\Bigr]\delta(q_k-q_k')dq_k'$$

$$=\cdots\cdots=\varphi(q_1q_2\cdots\cdots q_k),$$

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\delta'(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\cdots\cdots\delta(q_k-q_k')\varphi(q_1'-q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k'$$

$$=\frac{d}{dq_1}\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\delta(q_1-q_1')\delta(q_2-q_2')\cdots\cdots\delta(q_k-q_k')\varphi(q_1'\cdots\cdots q_k')dq_1'\cdots\cdots dq_k'$$

$$=\frac{d}{dq_1}\varphi(\varphi_1\cdots\cdots q_k),\ \text{等々}.$$

こうして実用上は，すべての作用素に対して積分的な表示 **I.** の採用を強行することができる．このような表示が得られさえすれば，問題 $\boldsymbol{E}_1$. と $\boldsymbol{E}_2$. とのあいだの類比は完全となる．

$\nu,\ \nu',\ \sum_{\nu'},\ x$

点をもつと考えられる．これは函数 $\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-aq^2}$ の $a\to+\infty$ の極限におけるふるまいに似ているが，それにもかかわらず実現不可能である．

を

$$q_1\cdots\cdots q_k,\ q_1'\cdots\cdots q_k',\ \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\cdots\cdots dq_1'\cdots\cdots dq_k',\ \varphi$$

でおきかえるだけでよい．ベクトル x_ν が函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ に対応するように，行列 $h_{\nu\nu'}$ は積分核 $h(q_1\cdots\cdots q_k,\ q_1'\cdots\cdots q_k')$ に対応させられるべきであるが，いつそう便利なのは，積分核そのものを行列とみなし，$q_1\cdots\cdots q_k$ は行を示し，$q_1'\cdots\cdots q_k'$ は列を示す（それぞれ $\nu,\ \nu'$ に対応して）ものと考えることである．そうすれば，離散的な（数 1, 2, …… で指定される）行および列からなる通常の行列 $\{h_{\nu\nu'}\}$ にならんで，全 Ω にわたって連続的に動く k 個の変数によって行および列が指定されるようなもう 1 つの行列 $\{h(q_1\cdots\cdots q_k,\ q_1'\cdots\cdots q_k')\}$（積分核）が考えられることになる．

このような類比は単に形式的なもののようにみえるかもしれないが，しかし事実はそうでない．というのは，それらが量子数（Bohr 理論の意味での，すなわち，量子条件によって離散的になった，位相空間における可能な軌道の数）を意味するとき，指標 $\nu,\ \nu'$ もまたある状態空間の座標とみなすことができるからである．

このような考えの進め方は Dirac と Jordan とによって量子的事象の明快な理論に仕上げられたのであるが，ここではこれ以上立ちいらないことにする．その理論では $\delta(x),\ \delta'(x)\cdots\cdots$ のような“普通でない”しろもの——それは普通のありふれた数学の枠からはみだしている*——が決定的な役割を果している．しかしわれわれは量子力学を通常の数学のたすけをかりて記述したいのである．それで，2 つの理論を統一する他の方法（Schrödinger の）へ移ることにする．

4. 両理論の同等性：ヒルベルト空間

I. 3 でスケッチした方法は，指標の値からなる“離散的”な空間 $Z=(1,\ 2\cdots\cdots)$ を，力学系の連続な状態空間 Ω（k を古典力学的な自由度の数とすれば，Ω は k 次元である）に類比するということだった．論理構成と数学とについていくつかの無理をおかさずにはこれが達成できないということは驚くに

---

* その後，$\delta(x)$ のような擬函数を函数の拡張として数学の体系中にとりいれた理論——超函数の理論がつくられた．L. Schwartz: Théorie des Distributions, 2 Tomes, Paris 1950～1951（岩村聯訳「超函数の理論」岩波書店 1953）〔訳者〕

あたらない：Z および Ω という空間は実際非常に異っており，それらをたがいに関係づけようとする試みはいずれも大へんな困難にゆきあたらざるをえない[33]．

しかし真に必要なのは，Z の Ω に対する関係などではなく，それらの各々における函数，すなわち，Z における函数である数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ と Ω における函数である波動函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ とのあいだの関係である．なぜなら，量子力学のなかで問題として提起されるのはこの関係だけだからである．

Schrödinger の理論では

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

という積分が大きな役割を果たす．そして φ が物理的記述の役にたつためには，これが1に等しくならなければならない（I. 2 を参照）．他方行列力学では（I. 3 の問題 $\boldsymbol{E}_1$. をみよ），ベクトル $x_1, x_2, \cdots\cdots$ が中心的な役割を果し，それは固有値問題についてのヒルベルトの理論によれば（さきの注 30）を参照），つねに

$$\sum_\nu |x_\nu|^2$$

が有限という条件にしたがわなければならない．そこまで考えなくとも，とるにたらない解 $x_\nu\equiv 0$ を排除するためにも，規格化の条件

$$\sum_\nu |x_\nu|^2=1$$

をおくのが普通である．したがって，Z においても Ω においても，許される函数に対してそれぞれ

$$\sum_\nu |x_\nu|^2 \quad \text{または} \quad \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

が有限という制約がおかれるのはもっともである．そのような函数だけが，適当な定数をかけて

$$\sum_\nu |x_\nu|^2 \quad \text{あるいは} \quad \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

33）量子力学のずっと以前から，いわゆる“一般解析（General Analysis）”の創始者であるE. H. Moore がそのような統一のために努力していた．これについては Mathematische Enzyklopädie Bd. II. 3, 9 Leipzig 1927 にある Hellinger-Toeplitz の論稿を参照．

を1にする，すなわち解を通常の意味で規格化することを許すのである[34]．そのような函数の全体をそれぞれ F_Z, F_Ω とよぶ．

ところでつぎの定理が成り立つ：

F_Z と F_Ω とは同型（isomorph）である（Fischer および F. Riesz[35]）．

これの意味をくわしく言うとつぎの通りである：

F_Z と F_Ω とのあいだに1対1の対応をつける，すなわち

$$\sum_\nu |x_\nu|^2$$

が有限であるような数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ のすべてに

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} |\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

が有限であるような函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ を対応させ，またその逆をおこない，この対応が線型（linear）でかつ"長さを変えない"（längentreu）ようにすることができる．ここで"線型"という意味は，$x_1, x_2\cdots\cdots$ に $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ が，$y_1, y_2\cdots\cdots$ に $\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ が対応するとすれば，$ax_1, ax_2\cdots\cdots$ および $x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots\cdots$ にはそれぞれ $a\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$, $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)+\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ が対応するということである．またたがいに対応する $x_1, x_2\cdots\cdots$ と $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ とで"長さが変らない"とは

$$\sum_\nu |x_\nu|^2 = \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} |\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

34） 波動函数 φ にとっては

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega} |\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

の有限性だけが本質的である，ということは Schrödinger の理論においてしばしば注目をひいた点である．この積分が有限でありさえすれば，例えば φ が特異性をもち，どこかで無限大になってもかまわないわけである．そのような例として教えるところの多いのは，Dirac の相対論的理論における水素原子である．Proc. Roy. Soc. Lond. Vol. 117 (1928) をみよ．また W. Gordon: Z. Physik Bd. 48 (1928) を参照．

35） われわれがヒルベルト空間の考察をすすめてゆくときに，この定理の1つの証明がおこなわれるであろう（II. 2, 3, とくに II. 2 の定理5を参照）．なおつぎのことは述べておく価値がある．Hilbert が明らかにしたことであるが（Gött. Nachr. 1906），多くの目的に対して有用であり且つ証明も容易なのは，この定理の半面である F_Ω と，F_Z の適当な部分とのあいだの同型である．したがって Schrödinger の最初の同等性の証明（注7をみよ）も，この定理の半面だけにもとづいておこなえるのである．

ということである（“長さが変らない”という言葉は，$x_1, x_2\cdots\cdots$ および $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ をベクトルと考えたとき，普通

$$\sqrt{\sum_{\nu}|x_\nu|^2} \quad \text{および} \quad \sqrt{\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k}$$

はそれぞれの“長さ”とみなされるということにもとづいている）．さらにつぎのことが成り立つ：

$x_1, x_2\cdots\cdots$ および $y_1, y_2\cdots\cdots$ にそれぞれ $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$, $\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ が対応すれば，

$$\sum_{\nu} x_\nu \bar{y}_\nu = \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}dq_1\cdots\cdots dq_k$$

である（すなわち，両辺は絶対収斂する）．

この最後の点についてなお注意すべきことがある．

$$\sum_{\nu} x_\nu = \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)dq_1\cdots\cdots dq_k$$

またはこれに似た関係，つまり一方における加算と他方における積分との類比の成り立つことを望むのは当然であるが，しかしよく調べると，加算 $\sum_{\nu}$ および積分 $\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\cdots\cdots dq_1\cdots\cdots dq_k$ は量子力学ではつねに

$$x_\nu \bar{y}_\nu \quad \text{および} \quad \varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}$$

という表現に対してしかほどこされない，ということがわかる．

どうしてこの対応がつくかということは，つぎの章でずっとたちいって論ずるので，ここでこれ以上調べるのはやめておく．しかし対応の存在が意味するところは，強調されてよいであろう．Z と Ω とは非常に異っており，それらのあいだに関係をうちたてようとすることは解きがたい数学的困難に導くにちがいない．それにもかかわらず，F_Z と F_Ω とは同型である．すなわち，その内的構造からいえば両者は同一なのである（それらは同一の抽象的な性質を異なる数学的形態において実現している）．そして，（Z や Ω 自身でなくて！）本来 F_Z と F_Ω こそがそれぞれ行列力学および波動力学の解析的基盤であるから，この同型性は，両方の理論がつねに同じ数値を結果として与えなければならないことを意味している．すなわち，この同型性によって行列

$$\overline{\mathrm{H}}=H(\overline{Q}_1, \cdots\cdots, \overline{Q}_k;\ \overline{P}_1, \cdots\cdots, \overline{P}_k)$$

と作用素

$$H=H\left(q_1, \cdots\cdots, q_k;\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots\cdots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\right)$$

とがたがいに対応づけられなければならないのである．どちらも同じ代数的操作によって，行列 $\overline{Q}_l$, $\overline{P}_l (l=1, \cdots\cdots, k)$ あるいは函数的作用素 $q_l\cdots\cdots$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}\cdots\cdots(l=1\cdots\cdots k)$ から作られるから，$q_l\cdots\cdots$ には行列 $\overline{Q}_l$ が，$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}\cdots\cdots$ には行列 $\overline{P}_l$ が対応することを示せば充分である．さて，$\overline{Q}_l$, $\overline{P}_l$ $(l=1, \cdots\cdots, k)$ については，それらが I. 2 で述べた“交換関係”

$$\left.\begin{aligned}&\overline{Q}_m\overline{Q}_n-\overline{Q}_n\overline{Q}_m=0,\ \ \overline{P}_m\overline{P}_n-\overline{P}_n\overline{P}_m=0\\ &\overline{Q}_m\overline{P}_n-\overline{P}_n\overline{Q}_m\begin{cases}=0 & m\neq n\\ =\dfrac{h}{2\pi i}1 & m=n\end{cases}\end{aligned}\right\}(m,\ n=1, 2, \cdots\cdots)$$

を満足すること以外にはなんの条件もない．ところが，この関係はまさに $q_l\cdots\cdots$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}\cdots\cdots$ に対応する行列がみたすものである． というのは，函数的作用素 $q_l\cdots\cdots$, $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_l}\cdots\cdots$ 自身がこの関係をみたし[36]，この性質は F_Z への同型的な移行によっては失われないからである．

系 F_Z と系 F_Ω とが同型であり，それらのうえに建設された量子力学の理論は数学的には同等であるから，F_Z と F_Ω に共通な函数集合体の内的な性質を調べてそれを出発点にとるならば，そのときどきに選ばれる偶然的な形式上の枠からは独立な，量子力学の本質的な核心を提示するような，完結した理論構成を得ることが期待できる．

F_Z は一般に“ヒルベルト空間”とよばれるものである．したがってまず第1に，F_Z とか F_Ω とかの特定の表現からは独立なヒルベルト空間の内的性質を研究することが肝要である．この特質によって記述される数学的構成物（これは具体的な個々の場合の演算では F_Z あるいは F_Ω に等しいとおかれるが，一般的な目的のためにはこれらのものよりは便利である）は“抽象ヒルベルト

---

36)
$$q_m\cdot q_n\cdot\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)=q_n\cdot q_m\cdot\varphi(q_1\cdots\cdots q_k),$$
$$\frac{\partial}{\partial q_m}\ \frac{\partial}{\partial q_n}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)=\frac{\partial}{\partial q_n}\ \frac{\partial}{\partial q_m}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k),$$
$$\frac{\partial}{\partial q_m}q_n\cdot\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)-q_n\cdot\frac{\partial}{\partial q_m}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\begin{cases}=0 & m\neq n\\ =\varphi(q_1\cdots\cdots q_k) & m=n\end{cases}$$

これから求める作用素間の関係はただちにでてくる．

空間"とよばれる.

それで，われわれは抽象ヒルベルト空間について述べ，つぎの点を極めて厳密に証明しようと思う.

1. 抽象ヒルベルト空間（略してH.R.）は，これから与える特質によって一義的に定まる．すなわち，それはもはや本質的に異なる解釈を許さない.

2. それの特質は F_Z と F_Ω のどちらもがもつ.

（したがって， I.4 では定性的な話をするにとどめた事柄が厳密に証明される）．これをおこなってから，こうして得られた数学的道具だてを量子力学の構成のために使用する.

II. 抽象ヒルベルト空間の一般論

1. H. R の 定 義

われわれは I.4 の終りでたてたプログラムを実行に移さなければならない. それは, 量子力学をとり扱うための数学的な基礎を与える H.R を, のちに量子力学で使われる概念だけを用いて特徴づけることである. したがってそこで使われる概念は, 数列 $x_\nu(\nu=1,2\cdots\cdots)$ のつくる "離散的な" 函数空間 F_Z においても, 波動函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ ($q_1\cdots\cdots q_k$ は状態空間 Ω のなかを動く) のつくる "連続的な" F_Ω におけるとまったく同じ意味をもつようなものである. このような概念とは, すでにそれとなくふれたように, つぎの通りである.

α) "スカラー乗積", すなわち (複素) 数 a を H.R の 1 つの要素 f に乗ずること: af.

F_Z では x_ν から ax_ν, F_Ω では $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ から $a\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ が生ずる.

β) H.R の 2 つの要素 f, g の加法と減法: $f\pm g$.

F_Z では x_ν と y_ν からそれぞれ $x_\nu\pm y_\nu$, F_Ω では $\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ と $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ から $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\pm\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$.

γ) H.R の 2 つの要素 f, g の "内積", (f,g).

α), **β**) が H.R の 1 つの要素を与えるのに反して, **γ**) は 1 つの (複素) 数をあたえる. F_Z では x_ν と y_ν とから $\sum_\nu x_\nu\bar{y}_\nu$ が, F_Ω では $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ と $\psi(q_1\cdots\cdots q_k)$ とから $\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}dq_1\cdots\cdots dq_k$ が与えられる (F_Z および F_Ω における定義は, なおそれぞれの収斂の証明を加えて完全にしなければならない. これは II.3 において遂行されるであろう).

ついでながら, われわれは以下で H.R に属する点を一貫して $f, g, \cdots\cdots, \varphi, \psi\cdots\cdots$ で表わし複素数を $a, b, \cdots\cdots, x, y, \cdots\cdots$ で, そして正の整数を $k, l, m, \cdots\cdots, \mu, \nu, \cdots\cdots$ でもって表わすことにする. H.R を必要な場合にはまた $\Re_\infty$ とよぶことにしよう ("n 次元のユークリッド空間" に対する普通の記号 $\Re_n[n=1,2,\cdots\cdots]$ と同様に, "∞-次元のユークリッド空間" に対する略記号

として).

af, $f\pm g$, (f,g) という演算にかんして，それらがまさにベクトル計算の基本的な演算であることは，注目に値する．たとえば，それはユークリッド幾何学において距離と角の計算の基礎づけとなりうるものであり，あるいは質点力学において力や仕事の計算を可能にするものである．かりに $\mathfrak{R}_\infty$ のなかの $x_1, x_2, \cdots\cdots$ のかわりに，$\mathfrak{R}_n$ の普通の点 $x_1, \cdots\cdots, x_n$,（これらの点にたいして演算 α), β), γ) をまったく同様におこなうことができる）を考えると，F_Z の場合の類似はもっとも明らかになる．とくに $n=3$ の場合には通常の空間の関係がえられる．場合によっては，$x_1, \cdots\cdots, x_n$ を点としてではなく，たとえば点 $0, \cdots\cdots, 0$ から $x_1, \cdots\cdots, x_n$ という点に向ったベクトルとして考える方が便利である．

したがって抽象ヒルベルト空間を特徴づけるために，われわれはこのベクトル的な基本関係 af, $f\pm g$, (f,g) を基礎におく．しかも，以下の議論で明らかになるように，$\mathfrak{R}_\infty$ とともにすべての $\mathfrak{R}_n$ が同時に把握されるであろう．それゆえ $\mathfrak{R}_\infty$ と $\mathfrak{R}_n$ とをまだ区別しようと思わないところでは，空間に対する Terminus neutralis [いずれにも属さない言葉] として $\mathfrak{R}$ という記号を使うことにする．

まず最初に，われわれは $\mathfrak{R}$ に対してベクトル空間に典型的な性質を要請する[37]：

A. $\mathfrak{R}$ は線型空間である．

すなわち，$\mathfrak{R}$ のなかで加法 $f+g$ および "スカラー" 乗積 af が定義され（f, g は $\mathfrak{R}$ の要素，a は複素数——$f+g$, af は $\mathfrak{R}$ に属する)，そして $\mathfrak{R}$ は要素 0 をもつ[38]．これに対してよく知られたベクトル代数の算法が成立する：

$$f+g=g+f \qquad \text{(加法の可換則)}$$

$$(f+g)+h=f+(g+h) \qquad \text{(加法の結合則)}$$

$$a(f+g)=af+ag,\quad (a+b)f=af+bf \qquad \text{(乗積の分配則)}$$

$$(ab)f=a(bf) \qquad \text{(乗積の結合則)}$$

---

37) **A. B. C**$^{(n)}$. による R_n の特徴づけは Weyl に始まる（たとえば "*Raum, Zeit, Materie*", Berlin 1921 参照)．$\mathfrak{R}_n$ の代りに $\mathfrak{R}_\infty$ をえようと思えば当然 **C**$^{(n)}$ を **C**$^{(\infty)}$ でおきかえなければならないが，そうすると **D**, **E** が必要になってくる．以下の本文で述べることを参照．

38) $\mathfrak{R}$ のゼロ点あるいはゼロベクトル 0 のほかに数 0 が存在するから同じ記号が 2 つのものに使われる．けれどもこれによって誤解が生じうるような事情はない．

$0f=0,\ 1f=1$ （ゼロと１の役割）

ここにあげてない算法の規則は，これらの要請から容易に導かれる．たとえば加法のさいのゼロの役割は

$$f+0=1\cdot f+0\cdot f=(1+0)\cdot f=1\cdot f=f.$$

あるいは減法の一義的な可能性はつぎのように導かれる．

$$-f=(-1)\cdot f,\quad f-g=f+(-g)$$

と定義する．そうすれば

$$\left.\begin{aligned}(f-g)+g&=(f+(-g))+g,\\ &=f+((-g)+g)\\ (f+g)-g&=(f+g)+(-g),\\ &=f+(g+(-g))\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&=f+((-1)\cdot g+1\cdot g)\\ &=f+((-1)+1)\cdot g\\ &=f+0\cdot g=f+0=f\end{aligned}$$

あるいは減法のさいの乗積の分配則：

$$\begin{aligned}a\cdot(f-g)&=a\cdot f+a\cdot(-g)=af+a\cdot((-1)\cdot g)=af+(a\cdot(-1))\cdot g\\ &=a\cdot f+((-1)\cdot a)\cdot g=af+(-ag)=af-ag,\\ (a-b)f&=a\cdot f+(-b)\cdot f=af+((-1)b)\cdot f=af+(-bf)\\ &=af-bf\end{aligned}$$

このようなことをさらに続けてゆくことは，やりがいのある仕事ではない．なぜなら線形なベクトル算法のすべての計算規則が，ここでもそのまま成立っていることはもはや明らかだからである．

したがって，われわれは $\mathfrak{R}$ のある要素 $f_1,\cdots\cdots,f_k$ の１次独立性をベクトルの１次独立性と同じように定義することができる：

定　義　*1*　$f_1,\cdots\cdots,f_k$ はもし $a_1f_1+\cdots\cdots+a_kf_k=0$ （$a_1,\cdots\cdots,a_k$ 複素数）から $a_1=\cdots\cdots=a_k=0$ が結論されるとき１次独立である．

さらにわれわれはベクトル算法における線型体（ゼロ点を通る直線，平面，等）に類似する線型多様体（Lineare Mannigfaltigkeit）を定義する．

定　義　*2*　$\mathfrak{R}$ の部分集合 $\mathfrak{M}$ は，もしその任意の k $(=1,2\cdots\cdots)$ 個の要素 $f_1,\cdots\cdots,f_k$ とともにそれらの１次結合の集り $a_1f_1+\cdots\cdots+a_kf_k$ をも含むならば，線型多様体とよばれる[39]．

39）　つぎのことを要求すれば充分であろう：f と同時に af が $f,\ g$ と同時に $f+g$ が $\mathfrak{M}$ に属する．そうすると $f_1,\cdots\cdots,f_k$ とともに $a_1f_1,\cdots\cdots,a_kf_k$ も $\mathfrak{M}$ に属すし，したがって順番に $a_1f_1+a_2f_2,\ a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3,\cdots\cdots,a_1f_1+\cdots\cdots+a_kf_k$ も $\mathfrak{M}$ に属する．

$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{R}$ の任意の部分集合とするときすべての $a_1f_1+\cdots\cdots+a_kf_k$ ($k=1,2,\cdots\cdots$, $a_1,\cdots\cdots,a_k$ は任意の複素数; $f_1,\cdots\cdots,f_k$ は $\mathfrak{A}$ の任意の要素) の集合は線型多様体を作りそれは明らかに $\mathfrak{A}$ を含む. そしてそれが $\mathfrak{A}$ を含む他のすべての線型多様体の部分集合であることは明らかである. それは "$\mathfrak{A}$ によって張られる線型多様体" とよばれ $\{\mathfrak{A}\}$ という記号で表される.

この概念をさらに展開するまえに, われわれはベクトル算法の第2の基本原理, すなわち内積の存在を定式化する:

B. $\mathfrak{R}$ においてエルミート内積が定義される. すなわち, (f,g) が定義され (f,g は $\mathfrak{R}$ の要素——(f,g) は複素数), それは次の性質をもつ:

$(f'+f'',g)=(f',g)+(f'',g)$ (第1の因子にかんする分配則)

$(a\cdot f,g)=a\cdot(f,g)$ (第1の因子にかんする結合則)

$(f,g)=\overline{(g,f)}$ (エルミート対称性)

$(f,f)\geqq 0$, $f=0$ に対してのみ $=0$[40] (定符号性)

なおエルミート対称性のために, 第1の因子にかんする2つの性質から第2の因子に対して対応する性質が導かれる (f と g とを入れかえ両辺の複素共役をとればよい):

$$(f,g'+g'')=(f,g')+(f,g'')$$
$$(f,a\cdot g)=\bar{a}\cdot(f,g)$$

この内積は距離の定義を可能にするから非常に重要である. ユークリッド空間では, よくしられているようにベクトル f の絶対値は

$$\|f\|=\sqrt{(f\cdot f)}$$

で定義され[41], 2つの点 f, g の距離は, $\|f-g\|$ によって定義される. このことを手がかりにして進もう.

<u>定 義 *3*</u> $\mathfrak{R}$ に属する f の "ノルム" は $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ であり, 2つの要素 f, g の "距離" は $\|f-g\|$ である[42].

---

40) (f,f) が実であることはすでにエルミート対称性から導かれる. なぜなら $f=g$ に対して, それは $(f,f)=\overline{(f,f)}$ を意味するからである.

41) f が成分 $x_1,\cdots\cdots,x_n$ をもつとすると, II. I. の γ) に述べたことによって (もし有限個の成分に限定すれば)

$$\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\sum_{\nu=1}^{n}|x_\nu|^2}$$

となる. すなわち通常のユークリッド空間の長さである.

42) (f,f) が実で $\geqq 0$ であるから, $\|f\|$ は実数であり, しかもその平方根は $\geqq 0$ にえらばれる. したがって同じことは $\|f-g\|$ に対してもいえる.

実際にこの概念が距離のすべての性質をもっていることは，すぐに明らかにされるであろう．この目的のためにつぎのことを証明する．

定 理 1 $$|(f,g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$$

が成立する．

証 明：まずつぎの式が成立つ：($z=u+iv$ が複素数であるとき——u, v は実——$\mathrm{Re}\, z$, $\mathrm{Im}\, z$ はそれぞれ z の実数，あるいは虚数の部分を表わす．すなわち $\mathrm{Re}\, z=u$, $\mathrm{Im}\, z=v$)

$$\|f\|^2+\|g\|^2-2\,\mathrm{Re}(f,g)=(f,f)+(g,g)-(f,g)-(g,f)=(f-g,f-g)\geqq 0,$$

$$\mathrm{Re}(f,g) \leqq \frac{1}{2}(\|f\|^2+\|g\|^2).$$

f, g を af, $\frac{1}{a}g$ (a は実で >0) でおきかえても，左辺は明らかに変化しない．しかし右辺は

$$\frac{1}{2}\left(a^2\|f\|^2+\frac{1}{a^2}\|g\|^2\right)$$

となる．これは $\geqq \mathrm{Re}(f,g)$ であるが，この不等式はまたそれの極小値にたいしても成り立つ．その値は $\|f\| \cdot \|g\|$ に等しい (f, $g \neq 0$ に対しては $a=\sqrt{\frac{\|g\|}{\|f\|}}$ のときに，また $f=0$ あるいは $g=0$ に対しては，それぞれ $a \to +\infty$, $a \to +0$ になるときにこの極小値をとる)．したがって

$$\mathrm{Re}(f,g) \leqq \|f\| \cdot \|g\|.$$

ここで f, g を $e^{i\alpha}f$, g (α 実数) でおきかえると右辺はかわらないが (なぜなら

$$(af,af)=a\bar{a}(f,f)=|a|^2(f,f),$$
$$\|af\|=|a| \cdot \|f\|$$

であり，したがって $|a|=1$ に対して $\|af\|=\|f\|$ である)，左辺は

$$\mathrm{Re}(e^{i\alpha}(f,g))=\cos\alpha\,\mathrm{Re}(f,g)-\sin\alpha\,\mathrm{Im}(f,g)$$

に移る．これは明らかに極大値

$$\sqrt{(\mathrm{Re}(f,g))^2+(\mathrm{Im}(f,g))^2}=|(f,g)|$$

をもっている．こうして

$$|(f,g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$$

という主張が結論される．

系 等号が成立するためには，f, g は定数 (複素数) の因子をのぞいて

一致しなければならない.

証　明:
$$\mathrm{Re}(f,g)\leqq\frac{1}{2}(\|f\|^2+\|g\|^2)$$
において $=$ になるためには $(f-g;\ f-g)=0$ すなわち $f=g$ すら成り立たなければならない. この関係式から
$$|(f\cdot g)|\leqq\|f\|\cdot\|g\|$$
に移るさいに, f あるいは g が $=0$ でなければ, $f,\ g$ は $e^{i\alpha}af,\ \frac{1}{a}g$ でおきかえられる. したがって, そこでも $=$ が成立するためには
$$e^{i\alpha}af=\frac{1}{a}g,\quad g=a^2e^{i\alpha}f=cf\qquad(c\neq 0)$$
でなければならない. 逆に f もしくは $g=0$, あるいは $g=cf$ $(c\neq 0)$ に対しては, 明らかに等号が成立する.

定　理　2　　つねに
$$\|f\|\geqq 0$$
であり, $f=0$ に対してのみ $=0$. また
$$\|a\cdot f\|=|a|\cdot\|f\|.$$
つねに
$$\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|$$
であって等号は $f,\ g$ が $\geqq 0$ の実数の定数を除いて一致するときにのみ成立する.

証　明: 最初の2つの主張は, すでにうえで正しいことが明らかにされている. 3番目の不等式はつぎのように証明される:
$$\begin{aligned}(f+g,\ f+g)&=(f,\ f)+(g,g)+(f,g)+(g,\ f)\\&=\|f\|^2+\|g\|^2+2\,\mathrm{Re}(f,g)\\&\leqq\|f\|^2+\|g\|^2+2\|f\|\cdot\|g\|=(\|f\|+\|g\|)^2,\end{aligned}$$
$$\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|.$$
$=$ が成り立つためには
$$\mathrm{Re}(f,g)=\|f\|\cdot\|g\|$$
でなければならない. このことからうえの系にもとづいて, f もしくは $g=0$ あるいは $g=a^2f=cf$ (c 実, >0) が結論される. この場合に実際 $=$ が成り立つことは明らかである.

さて定理2からただちに, 距離 $\|f-g\|$ がつぎの性質をもつことがわかる: $f,\ g$ が距離0をもつのは, $f=g$ のときのみである. $g,\ f$ は $f,\ g$ と同じ距

離をもつ. f, h の距離は, f, g および g, h の距離の和よりも小さいか等しい. 等しいのは, $g=af+(1-a)h$ (a, 実, $0\leqq a\leqq 1$) のときだけである[43].

af, ag の距離は f, g の距離の $|a|$ 倍である. ところでこれらは, まさしく距離の概念がもつつぎのような性質にほかならない: それは幾何学 (および位相幾何) において連続性, 有界性, 集積点などの概念を, 距離の概念にもとづいて定めることを可能にする性質である. このことをわれわれは利用しよう. そして以下のように定義する.

$\mathfrak{R}$ における函数 $F(f)$ (すなわち, $\mathfrak{R}$ に属する f に対して定義され, そしてその値としてつねに $\mathfrak{R}$ の点か, あるいはつねに複素数をとる) は, つぎのときに ($\mathfrak{R}$ のなかの) 点 f_0 において連続である: 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して

$$\|f-f_0\|<\delta$$

であれば (F の値が $\mathfrak{R}$ の点であるか, あるいは数であるかにしたがって)

$$\|F(f)-F(f_0)\|<\varepsilon \quad \text{あるいは} \quad |F(f)-F(f_0)|<\varepsilon$$

である.

$\mathfrak{R}$ もしくは $\mathfrak{R}$ のあたえられた部分集合のうえで, つねに

$$\|F(f)\|\leqq C \quad \text{あるいは} \quad |F(f)|\leqq C$$

(C は適当にえらんだ定数) が成立するとき函数 $F(f)$ はこの部分集合において有界であるとよばれる. 同じような定義は多くの変数の場合にも適用される. 点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ は

$$\|f_1-f\|, \|f_2-f\|, \cdots\cdots$$

という数がゼロに収斂するとき, f に収斂する. あるいは極限 f をもつ. ある1つの点はもしそれが集合 $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{R}$ の部分集合!) のなかの点列の極限であるとき, 集合の集積点である[44]. とくに $\mathfrak{A}$ のすべての集積点もまたそれに属する

---

43) 定理 2. をここで $f-g$, $g-h$ に適用することによって $f-g=0$ すなわち $g=f$ あるいは $g-h=0$ すなわち $g=h$, あるいは $g-h=c(f-g)$ (c 実, >0) すなわち $g=\dfrac{c}{c+1}f+\dfrac{1}{c+1}h$ でなければならない.

すなわち

$$g=af+(1-a)h, \quad a \text{ はそれぞれ } =1,\ 0,\ \frac{c}{c+1}.$$

幾何学的にはこれは点 g が直線 f, h の上にあることを意味する.

44) つぎのような集積点の定義も普通に使われている: 任意の $\varepsilon>0$ に対して, $\|f-f'\|<\varepsilon$ であるような f' が $\mathfrak{A}$ のなかにある. この2つの定義の同等性は数についての解析学におけるとまったく同様に証明される.

とき，$\mathfrak{A}$ は閉じているという．そしてもし $\mathfrak{A}$ の集積点が $\mathfrak{R}$ 全体を含むとき，$\mathfrak{A}$ はいたるところ密であるという．

なお，af, $f+g$, (f,g) が，そのすべての変数について連続であることを確めよう．

$$\|af-af'\|=|a|\cdot\|f-f'\|,$$
$$\|(f+g)-(f'+g')\|=\|(f-f')+(g-g')\|\leqq\|f-f'\|+\|g-g'\|$$

であるから，はじめの2つの主張は明らかである．さらに

$$\|f-f'\|<\varepsilon,\quad \|g-g'\|<\varepsilon$$

から，$f'-f=\varphi$, $g'-g=\psi$ とおけば，つぎの式が導かれる：

$$\begin{aligned}|(f,g)-(f',g')|&=|(f,g)-(f+\varphi,g+\psi)|\\&=|(\varphi,g)+(f,\psi)+(\varphi,\psi)|\\&\leqq|(\varphi,g)|+|(f,\psi)|+|(\varphi,\psi)|\\&\leqq\|\varphi\|\cdot\|g\|+\|f\|\cdot\|\psi\|+\|\varphi\|\cdot\|\psi\|\\&\leqq\varepsilon(\|f\|+\|g\|+\varepsilon).\end{aligned}$$

$\varepsilon\to 0$ のときこれは0に近づくから，任意の $\delta>0$ よりも小さくすることができる．

このように **A**, **B** という性質から，われわれは $\mathfrak{R}$ について実に多くのことを主張することができる．しかしそれでも $\mathfrak{R}_n$ をおたがい同士および $\mathfrak{R}_\infty$ から区別することができるためには十分でない．たしかに次元数をまだ問題にしていなかった．しかしこれはよく知られているように，1次独立なベクトルの最大数と関係している．もしこのような最大数 $n=0, 1, 2, \cdots\cdots$ が存在するならば，この n に対して，つぎの主張が成り立つ：

$\boldsymbol{C}^{(n)}$. n 個の1次独立なベクトルが存在する．すなわち1次独立なベクトルをちょうど n 個与えることはまったく可能であるが，$n+1$ 個は存在しない．

それに反して最大数がない場合にはつぎのようになる：

$\boldsymbol{C}^{(\infty)}$. 任意に多くの1次独立なベクトルがある．すなわちあらゆる $k=1, 2, \cdots\cdots$ に対してこのようなベクトルを k 個与えることができる．

C. はそれゆえ本来の意味の新しい要請ではない：**A**, **B** が成り立てば，$\boldsymbol{C}^{(n)}$. かあるいは $\boldsymbol{C}^{(\infty)}$. が成り立たなければならない．われわれがどちらに決めるかによって，ちがった空間 $\mathfrak{R}$ がえられる．

われわれは，$\boldsymbol{C}^{(n)}$. から $\mathfrak{R}$ が n 次元の（複素）ユークリッド空間のすべての性質をそなえていることが結論されるのを見るであろう．それに反して，$\boldsymbol{C}^{(\infty)}$.

は，$\mathfrak{R}$ と H. R. $\mathfrak{R}_\infty$ との同等性を保障するにはまだたりないのであって，われわれは，なおそのうえに 2 つの要請 ***D, E*** を必要とする．もっと正確にいうと事情はつぎのとおりである：***A, B,*** $\boldsymbol{C}^{(n)}$. をそなえた $\mathfrak{R}$ は，とりわけすぐつぎにあげる ***D, E.*** という性質も含めた $\mathfrak{R}_n$ のすべての性質をもつことが示されるであろう（したがって ***D, E*** は ***A, B,*** $\boldsymbol{C}^{(n)}$, から導かれる）．さらに ***A, B,*** $\boldsymbol{C}^{(\infty)}$, ***D, E*** をそなえた $\mathfrak{R}$ は，$\mathfrak{R}_\infty$ のすべての性質をもつこと，そしてそこでは ***D, E,*** が本質的であること（すなわち，それらは ***A, B,*** $\boldsymbol{C}^{(\infty)}$ からは出てこないこと）が明らかにされるであろう．そこでわれわれは ***D, E*** を定式化することに移る．すべての $\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_\infty$ がこれらの性質をもつことはあとになって（II. 3 を参照）証明されるであろう．

D. $\mathfrak{R}$ は完備（vollständig）である[45]．

すなわち，もし $\mathfrak{R}$ のなかの点列 $f_1, f_2 \cdots\cdots$ が Cauchy の収斂条件をみたすならば（任意の $\varepsilon>0$ に対し $m, n \geqq N$ であれば $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ であるような $N=N(\varepsilon)$ が存在する），その点列は収斂する．すなわちそれは極限 f をもつ（うえでおこなったこの概念の定義を参照）．

E. $\mathfrak{R}$ は可分（separabel）である[45]．

すなわち，$\mathfrak{R}$ のなかでいたるところ密であるような点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ が $\mathfrak{R}$ のなかに存在する．

すでに予告しておいたように，われわれは II. 2 でこのような基礎のうえに $\mathfrak{R}$ の“幾何学”を展開し，それが $\mathfrak{R}_n$ あるいは $\mathfrak{R}_\infty$ のものと一致することを示すであろう．

2. H. R. の幾何学

まず 2 つの定義から始めよう．第 1 は，幾何学的な角度の算法のうち，われわれがちょうど必要とするものだけを含む．それは直角の概念——直交性である．

定義 4　$\mathfrak{R}$ に属する 2 つの f, g は，$(f \cdot g)=0$ のとき直交する．

2 つの線型多様体 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ について，$\mathfrak{M}$ の各要素が $\mathfrak{N}$ の各要素に直交するとき，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ とは直交する．

45）われわれは簡単のため位相数学の Terminus technis（術語）を使う（たとえば Hausdorff: *Mengenlehre*, Berlin 1927 を参照）．それは以下の本文で説明されるであろう．

ある集合 $\mathfrak{D}$ に属するすべての f, g に対して

$$(f,g)=\begin{cases}1 & f=g \quad \text{に対し,}\\ 0 & f\neq g \quad \text{に対し,}\end{cases}$$

であるとき（すなわち，2つの異なる要素は直交し，かつ要素のノルムが1であるとき[46]），$\mathfrak{D}$ は規格化直交系とよばれる．とくに，$\mathfrak{D}$ がそれより多くの要素をもつ他の規格化直交系の部分集合でありえないとき，$\mathfrak{D}$ は完全であるという[47]．

なお，規格化直交系 $\mathfrak{D}$ が完全であるとは，あきらかに，$\mathfrak{D}$ 全体に直交し $\|f\|=1$ であるような f は存在しない（注 46 参照）ということであるのに注意しよう．ところで $f\neq 0$ で f が $\mathfrak{D}$ 全体に直交する，ということだけがわかれば，$f'=\frac{1}{\|f\|}\cdot f$（いうまでもなく $\|f\|>0$）に対してはうえの条件がみたされる：f' は $\mathfrak{D}$ 全体に直交し，かつ

$$\|f'\|=\frac{1}{\|f\|}\cdot\|f\|=1.$$

したがって，$\mathfrak{D}$ の完全性は，$\mathfrak{D}$ 全体に直交する f はすべてゼロでなければならないことを意味する．

第2の定義は，$\mathfrak{R}_\infty$ においてのみ本質的な役割をもつ．というのは $\mathfrak{R}_n$ におけるすべての線型多様体は，その定義で述べられるような種類のものだからである（II. 3 の最後をみよ）．したがって，それに対する幾何的直観的な像を描くことはできない．

定　義　5　　ある線型多様体が同時に閉じておれば，それは閉じた線型多様体とよばれる．

$\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{R}$ のなかの任意の集合とするとき，$\{\mathfrak{A}\}$（$\mathfrak{A}$ によって張られる線型多様体）にそれのすべての集積点をつけ加えれば $\mathfrak{A}$ を含む閉じた線型多様体ができる．しかもそれは，$\mathfrak{A}$ を含む他のすべての閉じた線型多様体[48]の部分集合である．これを $\mathfrak{A}$ によって張られる閉じた線型多様体とよび，記号 $[\mathfrak{A}]$ で表わす．

46）実際 $\|f\|=\sqrt{(f\cdot f)}=1$ である．

47）完全直交系は $\mathfrak{R}_n$ におけるデカルト座標系（すなわち，それの軸方向を向いた単位ベクトル）に対応することがわかる．

48）それは線型多様体として $\{\mathfrak{A}\}$ を含まなければならないが，そのうえ，閉じているから $\{\mathfrak{A}\}$ の集積点をも含まなければならない．

これで $\mathfrak{R}$，とくに規格化された完全直交系のより厳密な解析に移ることができる．A, B のほかに，$C^{(n)}$. または $C^{(\infty)}$, D., E. を前提とする定理には，指標 $^{(n)}$ または $^{(\infty)}$ をくっつけて示す．どちらの場合にも成り立つものには指標をつけない．

定理 $3^{(n)}$　規格化直交系はすべて $\leqq n$ 個の要素をもち，それが完全なのは n 個の要素をもつとき，そしてそのときだけである．

注意：ここの第1の主張から，規格化直交系に対しては要素の最大数があることがわかる．この最大数をもつものは，定義によって完全である．$C^{(n)}$ の場合に完全直交系が存在するときには，それはうえのことによって n 個の要素 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_n$ をもつ．

証明：すべての規格化直交系は（それが有限のとき）1 次独立である．それを $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_m$ で表わせば，

$$a_1\varphi_1+\cdots\cdots+a_m\varphi_m=0$$

において，φ_μ $(\mu=1, 2, \cdots\cdots, m)$ とこれとの内積を作れば

$$a_\mu=0$$

であることがわかる．したがって，$C^{(n)}$ によりそれは $n+1$ 個の要素をもつことはできないから，任意の規格化直交系は $n+1$ 個の要素からなる部分集合をもつことができない．ゆえにそれは有限で，$\leqq n$ 個の要素をもつ．

n 個の要素をもつものはもはや拡張を許さず，したがって完全である．しかし $n>m$ 個の要素 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_m$ からなるものは完全でない．なぜなら：1 次結合

$$a_1\varphi_1+\cdots\cdots+a_m\varphi_m$$

の集りのうち $m<n$ 個が1次独立であることはできないから，$C^{(n)}$ により，すべての

$$a_1\varphi_1+\cdots\cdots+a_m\varphi_m$$

と異なる f が存在する．すなわち

$$\psi=f-a_1\varphi_1-\cdots\cdots-a_m\varphi_m$$

はつねに $\neq 0$ である．ところで

$$(\psi, \varphi_\mu)=0$$

ということは

$$a_\mu=(f, \varphi_\mu) \qquad (\mu=1, 2, \cdots\cdots, m)$$

を意味するから，すべての μ に対して成り立たせることができる．したがって，

われわれの系は不完全である：

定　理　$3^{(\infty)}$　すべての規格化直交系は有限であるか，それとも（可算）無限個の列であるかである．それが完全であるときは確かに無限である．

注　意：このことから，あらゆる規格化直交系は（ときには途切れる，すなわち有限個の）点列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ で表わすことができる．

以下で実際そう表すこともある．系の要素の数が無限というのは，それが完全であるための必要条件にすぎず，$C^{(n)}$ の場合のように十分条件ではないということに注意しなければならない[49]．

証　明：$\mathfrak{O}$ をある規格化直交系，f, g をそれに属する2つの異なる要素とする．そのとき

$$(f-g, f-g)=(f, f)+(g, g)-(f, g)-(g, f)=2, \quad \|f-g\|=\sqrt{2}$$

である．いま $f_1, f_2, \cdots\cdots$ を E により存在するはずの $\mathfrak{R}$ のなかでいたるところ密な点列とする．$\mathfrak{O}$ に属する各 f に対して

$$\|f-f_m\|<\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

であるような f_m が，この点列のなかに存在する．f, g に対する f_m, f_n が $f_m=f_n$ であれば，

$$\|f-g\|=\|(f-f_m)-(g-f_m)\|\leqq\|f-f_m\|+\|g-f_m\|$$
$$<\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

となるから，f_m と f_n とは異ならなければならない．したがって，$\mathfrak{O}$ の各 f には点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ に属する1つの f_m が対応し，かつ異なる f には異なる f_m が対応する．ゆえに，$\mathfrak{O}$ は有限であるか，あるいは点列である．

定理 $3^{(n)}$ の証明のさいと同じく，$>m$ 個の1次独立な要素が $\mathfrak{R}$ のなかにあれば，系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_m$ は完全でありえないことが示される．ところで $C^{(\infty)}$ によって，すべての m についてこのことがいえるから，完全系は無限でなければならない．

これから導く諸定理は，そこで収斂を問題にするかぎりでは，$C^{(\infty)}$ にだけ関連するものである．しかしそれらには，より以上のものが含まれているので一般的に定式化することが望ましい．

49）$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が完全であるとすれば，$\varphi_2, \varphi_3, \cdots\cdots$ はもはや完全でない．しかし無限ではある！

定 理 4　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を1つの規格化直交系とする．すると

$$\sum_\nu (f, \varphi_\nu)\overline{(g, \varphi_\nu)}$$

という級数は総じて無限に多くの項からなるが，すべて絶対収斂する．とくに $f=g$ に対してはつねに

$$\sum_\nu |(f, \varphi_\nu)|^2 \leqq |f|^2$$

証 明:　　$a_\nu=(f, \varphi_\nu) \qquad \nu=1, 2, \cdots\cdots$

とおくと，

$$f-\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \varphi_\nu=\psi$$

はすべての φ_ν, $\nu=1, 2, \cdots\cdots, N$ に直交する（定理 $3^{(n)}$ の証明をみよ）．

$$f=\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu \varphi_\nu+\psi$$

であるから，

$$(f, f)=\sum_{\mu, \nu=1}^{N} a_\mu \bar{a}_\nu (\varphi_\mu, \varphi_\nu)+\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu (\varphi_\nu, \psi)+\sum_{\nu=1}^{N} \bar{a}_\nu (\psi, \varphi_\nu)+(\psi, \psi)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{N} |a_\nu|^2+(\psi, \psi) \geqq \sum_{\nu=1}^{N} |a_\nu|^2,$$

すなわち

$$\sum_{\nu=1}^{N} |a_\nu|^2 \leqq \|f\|^2$$

となる．系 $\varphi_1, \varphi_2 \cdots\cdots$ が有限ならば，これからただちに

$$\sum_\nu |a_\nu|^2 \leqq \|f\|^2.$$

系が無限ならば，$n\to\infty$ のとき $\sum_\nu |a_\nu|^2$ は（絶対）収斂し，かつまた $\leqq \|f\|^2$ である．こうして第2の主張は証明された．

しかるに，

$$|(f, \varphi_\nu)\overline{(g, \varphi_\nu)}| \leqq \frac{1}{2}\{|(f, \varphi_\nu)|^2+|(g, \varphi_\nu)|^2\}$$

であるから，第1の主張でのべられた一般的な収斂性も，うえに得た収斂性から導かれる．

定 理 5　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を1つの無限規格化直交系とする．すると級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu$$

は

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2$$

が収斂するとき，そしてそのときにのみ収斂する（あとの級数の各項は $0\leqq$ の実数でありしたがって収斂するか，でなければあきらかに $+\infty$ へ発散するかである）.

証　明：これは $C^{(\infty)}$ に対してだけ主張されるから Cauchy の収斂判定条件 $D.$ を使ってよい．そうすると

$$\sum_{\nu=1}^{N}x_\nu\varphi_\nu$$

の列は，任意の $\varepsilon>0$ に対して $N=N(\varepsilon)$ が存在して，$L, M\geqq N$ については

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{L}x_\nu\varphi_\nu-\sum_{\nu=1}^{M}x_\nu\varphi_\nu\right\|<\varepsilon$$

であるとき収斂する．すなわち

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}x_\nu\varphi_\nu$$

が収斂する．$L>M\geqq N$ と仮定すれば

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{L}x_\nu\varphi_\nu-\sum_{\nu=1}^{M}x_\nu\varphi_\nu\right\|=\left\|\sum_{\nu=M+1}^{L}x_\nu\varphi_\nu\right\|<\varepsilon,$$

$$\left\|\sum_{\nu=M+1}^{L}x_\nu\varphi_\nu\right\|^2=\left(\sum_{\nu=M+1}^{L}x_\nu\varphi_\nu,\ \sum_{\nu=M+1}^{L}x_\nu\varphi_\nu\right)=\sum_{\mu,\nu=M+1}^{L}x_\mu\bar{x}_\nu(\varphi_\mu,\varphi_\nu)=\sum_{\nu=M+1}^{L}|x_\nu|^2$$

$$=\sum_{\nu=1}^{L}|x_\nu|^2-\sum_{\nu=1}^{M}|x_\nu|^2$$

であるから，

$$0\leqq\sum_{\nu=1}^{L}|x_\nu|^2-\sum_{\nu=1}^{M}|x_\nu|^2<\varepsilon^2,$$

ところで，これは数列 $\sum_{\nu=1}^{N}|x_\nu|^2$，$N\to\infty$ に対する，すなわち $\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2$ に対する Cauchy の収斂条件である．

系　　　　$$f=\sum_{\nu}x_\nu\varphi_\nu$$

ならば

$$(f, \varphi_\nu) = x_\nu$$

である（直交系が有限であっても無限であっても同じであるが，あとの場合には，もちろん収斂性を前提としてである）.

証　明：$N \geqq \nu$ に対して

$$\left(\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \varphi_\mu, \varphi_\nu\right)$$

は

$$\sum_{\nu=1}^{N} x_\mu (\varphi_\mu, \varphi_\nu) = x_\nu$$

に等しい．有限な系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ においては，N を指標の最高値に等しいとおくことができる：無限の系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ においては，内積の連続性を考慮して $N \to \infty$ とすることができる．どちらの場合にも

$$(f, \varphi_\mu) = x_\mu$$

が得られる.

定　理　6　　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を 1 つの規格化直交系，f は任意とする.

$$f' = \sum_\nu x_\nu \varphi_\nu, \quad x_\nu = (f, \varphi_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$$

は一般に無限級数であるが，つねに収斂する．$f - f'$ は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に直交する.

証　明：収斂性は定理 4, 5 からでてくる．また定理 5 の系により

$$(f', \varphi_\nu) = x_\nu = (f, \varphi_\nu),$$
$$(f - f', \varphi_\nu) = 0$$

である.

これだけの準備ののち，規格化直交系が完全であるための一般的な，すなわち，$C^{(\infty)}$. においても成り立つ規準を与えることができる.

定　理　7　　$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を 1 つの規格化直交系とする．これが完全であるためには，つぎの条件のどれか 1 つが必要かつ十分である：

α）$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の張る閉じた線型多様体〔$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$〕が $\mathfrak{R}$ に等しい.

β）つねに

$$f = \sum_\nu x_\nu \varphi_\nu, \quad x_\nu = (f, \varphi_\nu)$$

である（$\nu = 1, 2, \cdots\cdots$，定理 6 により収斂）.

γ) つねに

$$(f,g)=\sum_\nu (f,\varphi_\nu)\overline{(g,\varphi_\nu)}$$

である（定理 4 により絶対収斂）.

証　明：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が完全であれば，

$$f-\sum_\nu x_\nu \varphi_\nu$$

$$(x_\nu=(f,\varphi_\nu),\ \ \nu=1,2,\cdots\cdots)$$

は定理 6 により $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に直交し，したがって 0 に等しい．すなわち β）が満される．β）が成り立てば，すべての f は

$$\sum_{\nu=1}^N x_\nu \varphi_\nu$$

の $N\to\infty$ の極限であり（$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が無限のとき），したがって〔$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$〕に属する．そうすれば

$$[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\cdots]=\Re$$

である．すなわち α）がみたされる．α）が成り立てばつぎのように結論される：f がすべての $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に直交すれば，f はそれらの 1 次結合に，そして連続性を根拠にしてそれらの集積点に直交することがいえる．すなわち，f は〔$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$〕の全体に直交する．したがって $\Re$ 全体に，それゆえまたそれ自身に直交する：

$$(f,f)=0 \quad f=0$$

したがって，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は完全である．

こうして，つぎの論理的図式がえられた：

完全性→β)→α)→完全性

すなわち，α), β) は必要かつ十分であることがわかった．

γ) からは，f がすべての $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に直交するとすれば，$f=g$ とおくことによって

$$(f,f)=\sum_\nu 0\cdot 0=0,$$

$$f=0$$

がえられる．すなわち，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は完全である．他方，（完全性に同等であるところの）β) からつぎの結果が導かれる：

$$(f,g)=\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{\nu=1}^N (f,\varphi_\nu)\cdot\varphi_\nu,\ \sum_{\nu=1}^N (g,\varphi_\nu)\cdot\varphi_\nu\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{\mu,\nu=1}^{N}(f,\varphi_\mu)\overline{(g,\varphi_\nu)}\cdot(\varphi_\mu,\varphi_\nu)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{\nu=1}^{N}(f,\varphi_\nu)\overline{(g,\varphi_\nu)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}(f,\varphi_\nu)\overline{(g,\varphi_\nu)}$$

(系 $\varphi_1, \varphi_2\cdots\cdots$ が有限であれば，極限移行は余分である)．すなわち **γ**) が得られた．したがって，**γ**) もまた必要かつ十分である．

定　理 8　あらゆる点列 $f_1, f_2\cdots\cdots$ に対して，これとちょうど同じ線型多様体を張るような規格化直交系が存在する（どちらの点列も有限で切れることがありうる）．

証　明：まず，$f_1, f_2\cdots\cdots$ も，これと同じ線型多様体を張り1次独立な要素だけからなるその部分列でおきかえられる．それができたとして，g_1 を 0 と異なる最初の f_n, g_2 をすべての a_1g_1 と異なる最初の f_n, g_3 をあらゆる $a_1g_1+a_2g_2$ と異なる最初の f_n, …… とする（もし，ある p に対してはすべての $a_1g_1+\cdots\cdots+a_pg_p$ と異なる f_n がみつからなければ，g_p でやめる）．これらの $g_1, g_2, \cdots\cdots$ は明らかに望むものである．

そこでつぎのものを作る（これはいわゆる E. Schmidt の“直交化の手続き”である）：

$$\gamma_1=g_1, \qquad \varphi_1=\frac{1}{\|\gamma_1\|}\cdot\gamma_1,$$

$$\gamma_2=g_2-(g_2,\varphi_1)\cdot\varphi_1, \qquad \varphi_2=\frac{1}{\|\gamma_2\|}\cdot\gamma_2,$$

$$\gamma_3=g_3-(g_3,\varphi_1)\cdot\varphi_1-(g_3,\varphi_2)\cdot\varphi_2, \quad \varphi_3=\frac{1}{\|\gamma_3\|}\gamma_3,$$

……………………………………………………………

φ_p の構成はいずれも実際に可能である．すなわち，分母の $\|\gamma_p\|$ は $\neq 0$ である：なぜなら，そうでなければ $\gamma_p=0$, したがって仮定に反して g_p は $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_{p-1}$, すなわち，$g_1, \cdots\cdots, g_{p-1}$ の1次結合になるからである．さらに，g_p は $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_p$ の1次結合でありまた φ_p は $g_1, \cdots\cdots, g_p$ の1次結合である．――したがって，$g_1, g_2, \cdots\cdots$ と $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ とは同一の線型多様体を張る，ということは明らかである．

最後に，その成り立ちからして $\|\varphi_p\|=1$ であり，また $q<p$ に対しては $(\gamma_p,\varphi_q)=0$, したがって $(\varphi_p,\varphi_q)=0$ である．この最後の式で p と q とをいれかえることができるから，これは $p\neq q$ に対してつねに成り立つ．したが

って，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は1つの規格化直交系である．

定　理　9　　あらゆる閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ に対して，それが張る閉じた線型多様体がちょうど $\mathfrak{M}$ になるような規格化直交系が存在する．

証　明：$C^{(n)}$. の場合には，この定理は自明である．というのは，$\mathfrak{R}$ が $A.$, $B.$, $C^{(n)}$., をみたせば $\mathfrak{R}$ のなかのあらゆる $\mathfrak{M}$ はある $m \leqq n$ に対して $A.$, $B.$, $C^{(m)}$. をみたす．したがって定理 $3^{(n)}$ への注意が $\mathfrak{M}$ に適用されて，$\mathfrak{M}$ のなかで完全な規格化直交系 $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_m$ が存在するが，これは定理 7 の α) により，まさにいわんとしたことがらだからである（このとき閉じているという前提も不要である．のみならずそれは証明される．このことについては定義 5 のまえに述べたことを参照）．

$C^{(\infty)}$. の場合 $\mathfrak{R}$ は $E.$ によって可分であることを念頭において，$\mathfrak{M}$ もまたそうであること——一般に $\mathfrak{R}$ の部分集合はすべて可分であることを証明する．すなわち，$\mathfrak{R}$ のなかでいたるところ密な点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ を作り（II. 1 の $E.$ をみよ），各 f_n および $m=1, 2, \cdots\cdots$ に対して，

$$\|f-f_n\|<\frac{1}{m}$$

をみたすすべての f からなる球 $\mathfrak{K}_{n,m}$ を作る．$\mathfrak{M}$ の点を含むすべての $\mathfrak{K}_{n,m}$ から，それぞれ $\mathfrak{M}$ の点を1つ選びだして $g_{n,m}$ とする．したがってある n, m に対しては $g_{n,m}$ がないこともあるが，しかし選び出された $g_{n,m}$ は $\mathfrak{M}$ からとり出された点列をなす[50]．いま f を $\mathfrak{M}$ の任意の点，$\varepsilon>0$ とする．そのとき，

$$\frac{1}{m}<\frac{\varepsilon}{2}$$

をみたす m および

$$\|f_n-f\|<\frac{1}{m}$$

をみたす f_n が存在する．すると $\mathfrak{K}_{n,m}$ は $\mathfrak{M}$ の点を含む（すなわち f）から，$g_{n,m}$ が定まり

$$\|f_n-g_{n,m}\|<\frac{1}{m},$$

したがって

50）2重列 $g_{n,m}(n, m=1, 2, \cdots\cdots)$ はまた単純な点列 $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{13}, g_{22}, g_{31}, \cdots\cdots$ のように書くこともできることに留意せよ．

$$\|f-g_{n,m}\|<\frac{2}{m}<\varepsilon.$$

こうして，f は，定義された $g_{n,m}$ の集積点であるから，この点列は望みのものである．

そこで，$\mathfrak{M}$ のなかでいたるところ密な，$\mathfrak{M}$ からとり出された点列を $f_1, f_2,$ …… とよぶ．これが定める閉じた線型多様体〔$f_1, f_2,$ ……〕はそれらの集積点をすべて包含するから，$\mathfrak{M}$ 全体をも包含する．しかるに $\mathfrak{M}$ は閉じた線型多様体であり $f_1, f_2,$ …… はそれに属するから，〔f_1, f_2……〕もまた $\mathfrak{M}$ の部分である——したがってそれは $\mathfrak{M}$ に等しい．そこで，定理 *8* によって規格化直交系 $\varphi_1, \varphi_2,$ …… を選べば

$$\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\cdots\}=\{f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots\}$$

であるから，両辺に集積点を附加すると

$$[\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\cdots]=[f_1,\ f_2,\ \cdots\cdots]=\mathfrak{M}$$

となる．ところで，これは，われわれの主張したところである．

定理 *9* において $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}$ とおきさえすれば，われわれが得た φ_1, φ_2…… は，定理 *7*, α) によって規格化された完全直交系である．したがって，規格化された完全直交系が存在する．

以上で $\mathfrak{R}$ は $\mathfrak{R}_n$ または $\mathfrak{R}_\infty$ である（$\boldsymbol{C}^{(n)}$. または $\boldsymbol{C}^{(\infty)}$. がみたされるのにしたがって），すなわち，$\mathfrak{R}$ の性質はすべて確定された，ということを示す準備がととのった．

それにはつぎのことを示せばよい：$\mathfrak{R}$ は，

$$\{x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n\}$$

または

$$\{x_1,\ x_2\cdots\cdots\}\quad\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_\nu|^2\ \text{有限}\right)$$

のうえへ，つぎのような具合に 1：1 に写像される：

1. $$f\longleftrightarrow\{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}$$

から

$$af\longleftrightarrow\{ax_1,\ ax_2,\ \cdots\cdots\}$$

が導かれ，

2. $$\begin{cases}f\longleftrightarrow\{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}\\ g\longleftrightarrow\{y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots\}\end{cases}$$

から

$$f+g \longleftrightarrow \{x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \cdots\cdots\}$$

が導かれ，また

3.
$$\begin{cases} f \longleftrightarrow \{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\} \\ g \longleftrightarrow \{y_1,\ y_2,\ \cdots\cdots\} \end{cases}$$

から

$$(f, g) = \sum_{\nu=1}^{n\ \text{または}\ \infty} x_\nu \bar{y}_\nu$$

が導かれる（∞ の場合には，3. においてなお絶対収斂を示さなければならない）．このような対応づけ

$$f \longleftrightarrow \{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}$$

をつぎに与えよう．

$\varphi_1, \varphi_2 \cdots\cdots$ を規格化された完全直交系とする．$C^{(n)}$ の場合には，これは φ_n で途切れるが，$C^{(\infty)}$ の場合には無限に続く（定理 $3^{(n)}$, $3^{(\infty)}$）．

$$f = \sum_{\nu=1}^{n\ \text{または}\ \infty} x_\nu \varphi_\nu$$

とおく．

定理 *5* によって，この級数は ∞ の場合にも収斂する $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |x_\nu|^2\right.$ が有限だから$\left.\right)$，すなわち $\Re_n$ または $\Re_\infty$ は，これによってちょうどとりつくされる．しかるに，定理 *7* $\boldsymbol{\beta}$）および

$$\sum_{\nu=1}^{n\ \text{または}\ \infty} |(f, \varphi_\nu)|^2$$

が有限である（定理 *4*）ことによって，$\Re$ もまたとりつくされる $[x_\nu = (f, \varphi_\nu)$ とおけばよい$]$，各 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}$ にたゞ1つの f が対応することは明らかである．その逆は定理 *5* の系 からえられる．

1. 2 は明らかに満足され，3. は定理 *7* $\boldsymbol{\gamma}$）からでてくる．

3. 条件 A.—E. についての補論[51)]

われわれはなお，I.4 の終りの主張 2. を証明しなければならない．それは F_Z, F_Ω が実際に条件 *A.*—*E.* をみたすということである．そのさい F_Ω を考察すれば十分である．

51）この章はあとに続く章を理解するためには必要ではない．

それは，すでに II.2 で **A.－E.** をそなえた $\mathfrak{R}$ があらゆる性質において $\mathfrak{R}_\infty$ と，すなわち F_Z と一致しなければならないことが示されているからである．したがって **A.－E.** は F_Z に対してもまた成り立つはずである．そのほかに，II.2 で言及した，条件 **D, E** の **A.－C**$^{(\infty)}$. からの独立性ならびに **D. E.** が **A.－C**$^{(n)}$ から導かれること，すなわちそれらが $\mathfrak{R}_n$ で成り立つということが示されるであろう．これら3つの純粋に数学的な問題が，この章の目的とするところである．

F_Ω における **A.－E.** の証明から始める．そのさいわれわれはルベーグ積分の概念にもとづかなければならないであろう．その概念の基礎づけについては，それにかんする専門的な研究を参照しなければならない[52]（しかし，ルベーグ積分はこの個所でのみ登場するのであり，以下の章を理解するためにはその知識は必要でない）.

I.4 で Ω は $q_1, \cdots\cdots, q_k$ の k 次元空間として導入された．また，F_Ω は有限な

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

をもったすべての函数 $f(q_1\cdots\cdots q_k)$ の集合として導入された．その積分のさいにすべての $q_1\cdots\cdots q_k$ は $-\infty$ から $+\infty$ まで変化するものとした．$q_1, \cdots\cdots, q_k$ の変化する領域を制限したとしても（すなわち，たとえば半空間あるいは立方体の内部や球の内部，あるいはそれらの外部，等々に制限したとしても）――それどころか Ω として曲面（たとえば球面など）をえらんだとしても――もちろん，われわれが導き出した結論はすべて成り立つであろうし，またそれらの証明も，たいていはそのまゝこれらの場合に移しかえることができる．しかし本質的でない複雑さをさけるために（読者は，われわれの典型的な証明をもとにして容易に自分でそれらを議論することができる），われわれは，うえにあげたもっとも簡単な場合に限定する．さて **A.－E.** を順を追って調べてゆこう：

A について． f, g と同時に af, $f\pm g$ もまた F_Ω に属すること，すなわち

$$\int_\Omega |f|^2,\quad \int_\Omega |g|^2$$

52) たとえば，Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig 1927. とくに p. 237～274: Kamke: *Das Lebesguesche Integral*, Leipzig 1925.

と同時に（誤解はありえないから

$$\underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|f(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots\cdots dq_k,\quad \underbrace{\int\cdots\cdots\int}_{\Omega}|g(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots dq_k$$

をうえのように簡単に書く）

$$\int_\Omega|af|^2=|a|^2\int_\Omega|f|^2,\qquad \int|f\pm g|^2$$

もまた有限であることを示さなければならない．はじめの方は明白である．あとの方は

$$\int_\Omega|f\bar{g}|=\int_\Omega|f||g|$$

の有限性がたしかめられれば，

$$|f\pm g|^2=|f|^2+|g|^2\pm 2\,\mathrm{Re}(f,\bar{g})^{53)}$$

によって証明される．それは

$$|f||g|\leqq\frac{1}{2}(|f|^2+|g|^2)$$

によって，仮定から導かれる．

B* について．** (f,g) を $\int_\Omega f\bar{g}$ と定義しよう．この積分は，うえで見たように絶対収斂する．B*** で要請されたすべての性質は，最後のものを除いて明らかである．それは $(f,f)=0$ ならば $f\equiv 0$ であることであった．$(f,f)=0$ は $\int_\Omega|f|^2=0$ を意味するから，$|f|^2>0$ すなわち $f(q_1,\cdots\cdots,q_k)\neq 0$ であるような点の集合はルベーグ測度 0 でなければならない．ここでルベーグ測度 0 の $q_1\cdots\cdots q_k$ 集合においてのみ $f\neq 0$〔すなわち $f(q_1\cdots\cdots q_k)\neq g(q_1\cdots\cdots q_k)$〕であるような 2 つの函数 f,g は本質的には同じものであるとみなせば[54]，われわれは $f\equiv 0$ を確認することができる．

***C* について．** $O_1,\cdots\cdots O_n$, はΩのなかの n 個の領域で，それらのうちどの 2 つをとっても共通点をもたないものとしよう．そして，どれのルベーグ測度もゼロより大で，かつ有限であるとする．$f_i(q_1\cdots\cdots q_k)$ は O_i のなかでは $=1$ その他では $=0$ としよう．

53）一般に

$$|x+y|^2=(x+y)(\bar{x}+\bar{y})=x\bar{x}+y\bar{y}+(x\bar{y}+\bar{x}y)=|x|^2+|y|^2+2\,\mathrm{Re}(x\bar{y})$$

である．

54）これはルベーグ積分論で一般に行われている．

$$\int_{\Omega}|f_l|^2=O_l \text{ の測度}$$

であるから，それは F_Ω に属する $(l=1,\cdots\cdots,n)$. この $f_1,\cdots\cdots,f_n$ は1次独立である．なぜなら，

$$a_1f_1+\cdots\cdots+a_nf_n\equiv 0$$

から左辺の函数がゼロにならないのはルベーグ測度0の集合のなかだけであり，しかもすべての O_l のなかにゼロ点をもつことがわかる．ところで，それは O_l で定数 $=a_l$ であるから，$a_l=0,\ l=1,\cdots\cdots,n$ でなければならない．任意の n に対してこのような O_l を構成することができるから $C^{(\infty)}$. が成り立つのである．

D について． 点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ が Cauchy の収斂条件をみたす．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して $N=N(\varepsilon)$ が存在し，もし $m,\ n\geqq N$ ならば

$$\int_{\Omega}|f_m-f_n|^2<\varepsilon$$

であるとする．われわれは

$$n_1=N\left(\frac{1}{8}\right);\ n_2\geqq n_1,\ N\left(\frac{1}{8^2}\right);\ n_3\geqq n_1,\ n_2,\ N\left(\frac{1}{8^3}\right);\cdots\cdots$$

のようにえらぶ．それゆえ

$$n_1\leqq n_2\leqq\cdots\cdots n_\nu,\ n_{\nu+1}\geqq N\left(\frac{1}{8^\nu}\right)$$

であり，したがって

$$\int_{\Omega}|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_\nu}|^2<\frac{1}{8^\nu}$$

である．ここで

$$|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_\nu}|>\frac{1}{2^\nu}$$

であるようなすべての点の集合，$P^{(\nu)}$ を考える．そのルベーグ測度を $\mu^{(\nu)}$ とすると

$$\int_{\Omega}|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_\nu}|^2\geqq\mu^{(\nu)}\left(\frac{1}{2^\nu}\right)^2=\frac{\mu^{(\nu)}}{4^\nu},$$

$$\frac{\mu^{(\nu)}}{4^\nu}<\frac{1}{8^\nu},\ \mu^{(\nu)}<\frac{1}{2^\nu}$$

が成り立つ．

つぎに $P^{(\nu)},\ P^{(\nu+1)},\ P^{(\nu+2)}\cdots\cdots$ の和によって生ずる集合 $Q^{(\nu)}$ を考える．そ

のルベーグ測度は

$$\leqq \mu^{(\nu)}+\mu^{(\nu+1)}+\mu^{(\nu+2)}+\cdots\cdots<\frac{1}{2^{\nu}}+\frac{1}{2^{\nu+1}}+\frac{1}{2^{\nu+2}}+\cdots\cdots=\frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

$Q^{(\nu)}$ の外部では

$$|f_{n_{\nu+1}}-f_{n_{\nu}}|<\frac{1}{2^{\nu}},\quad |f_{n_{\nu+2}}-f_{n_{\nu+1}}|<\frac{1}{2^{\nu+1}},$$

$$|f_{n_{\nu+3}}-f_{n_{\nu+2}}|<\frac{1}{2^{\nu+2}},\cdots\cdots$$

が成り立つから，一般に $\nu\leqq\nu'\leqq\nu''$ に対して

$$|f_{n_{\nu''}}-f_{n_{\nu'}}|<|f_{n_{\nu'+1}}-f_{n_{\nu'}}|+|f_{n_{\nu'+2}}-f_{n_{\nu'+1}}|+$$

$$\cdots\cdots+|f_{n_{\nu''}}-f_{n_{\nu''-1}}|<\frac{1}{2^{\nu'}}+\frac{1}{2^{\nu'+1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{\nu''-1}}<\frac{1}{2^{\nu'-1}},$$

$\nu'\to\infty$ においてこれは ν'' に無関係に 0 に近づく，すなわち，もし $q_1\cdots\cdots q_k$ が $Q^{(\nu)}$ のなかになければ，f_{n_1}, f_{n_2}, …… は Cauchy の収斂条件をみたすのである．($q_1\cdots\cdots q_k$ を固定したときには）数を扱っているのだから，この点列もまた収斂する．したがって逆につぎのように言うことができる： 点列 f_{n_1}, f_{n_2}, …… が，ある $q_1\cdots\cdots q_k$ に対して収斂しなければ，その $q_1\cdots\cdots q_k$ は $Q^{(\nu)}$ のなかにある．そこで収斂がおこらないすべての $q_1\cdots\cdots q_k$ の集合を Q とすると，Q は $Q^{(\nu)}$ の部分であり，したがってその測度は $Q^{(\nu)}$ のそれよりも小さい，すなわち $<\frac{1}{2^{\nu-1}}$．Q は ν に無関係に定義されるから，これはすべての ν に対して成り立つはずである．それゆえ Q のルベーグ測度は 0 である．だから，たとえば Q のなかですべての f を 0 に等しくおいてもさしつかえない（注 54) 参照)．そうすると f_{n_1}, f_{n_2}, …… は Q のなかでも，したがっていたるところで収斂する．

このようにして，われわれはすべての点 $q_1\cdots\cdots q_k$ において収斂するような $f_1, f_2\cdots\cdots$ の部分列，f_{n_1}, f_{n_2}, …… をとり出した（f_1, f_2, …… は必ずしもすべての点で収斂しない)．f_{n_1}, f_{n_2}, …… の極限を $f=f(q_1\cdots\cdots q_k)$ とよぼう．われわれは，なおつぎのことを明らかにしなければならない：

1. f は F_Ω に属する，すなわち $\int_\Omega|f|^2$ は有限である．
2. f はすべての $q_1, \cdots\cdots, q_k$ に対する収斂という意味だけでなく，ヒルベルト空間の“ノルムの収斂”の意味においても，f_{n_1}, f_{n_2}, …… の極限である．すなわち

$$\|f-f_{n_\nu}\|\to 0$$

あるいは

$$\int_\Omega |f-f_{n_\nu}|^2 \to 0$$

3. この意味ではそれは点列全体 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ の極限でさえある. すなわち

$$\|f-f_n\| \to 0, \quad \text{あるいは} \quad \int_\Omega |f-f_n|^2 \to 0.$$

$\varepsilon>0$ とし, ν_0 を $n_{\nu_0} \geqq N(\varepsilon)$ であるようにえらぶ $\left(\text{たとえば } \dfrac{1}{8^{\nu_0}} \leqq \varepsilon\right)$, そして $\nu \geqq \nu_0$, $n \geqq N(\varepsilon)$ とする, そうすると

$$\int_\Omega |f_{n_\nu}-f_n|^2 < \varepsilon$$

である. $\nu\to\infty$ にすると, 被積分函数は $|f-f_n|^2$ になるから (ルベーグ積分の収斂定理による. 上述の注 52) 参照),

$$\int_\Omega |f-f_n|^2 \leqq \varepsilon$$

したがって第 1 に $\int_\Omega |f-f_1|^2$ が有限である. すなわち $f-f_1$ は, F_Ω のなかにある : f_1 は F_Ω に属するから, f もまた F_Ω に属する : すなわち 1 は証明された. 第 2 にうえの不等式から $n\to\infty$ に対して

$$\int_\Omega |f-f_n|^2 \to 0.$$

すなわち, 2. および 3. が導かれる.

***E* について.** F_Ω のなかでいたるところ密な函数列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ を呈示することが問題である.

$\Omega_1, \Omega_2, \cdots\cdots$ を Ω のなかの領域の列でその各々は有限の測度をもち, それらをあわせると Ω 全体をおおうものとする (たとえば, Ω_N は点ゼロを中心とする半径 N の球とする). $f=f(q_1\cdots\cdots q_k)$ を F_Ω のなかのある要素とし, 各 $N=1, 2, \cdots\cdots$ に対して

$$f_N = f_N(q_1\cdots\cdots q_k)$$

をつぎのように定義する :

$$f_N(q_1\cdots\cdots q_k) = \begin{cases} f(q_1\cdots\cdots q_k) & \left\{\begin{array}{l} q_1\cdots\cdots q_k \text{ が } \Omega_N \text{ にあって,} \\ |f(q_1\cdots\cdots q_k)| \leqq N \text{ であるとき,} \end{array}\right. \\ 0 & \{\text{その他の場合.} \end{cases}$$

$N\to\infty$ のとき

$$f_N(q_1\cdots\cdots q_k) \to f(q_1\cdots\cdots q_k)$$

（ある定まったNより以後は等号すら成り立つ）であるから，

$$|f-f_N|^2\to 0$$

である．さらに $f-f_N=0$ あるいは f，したがって

$$|f-f_N|^2\leqq|f|^2.$$

それゆえ積分 $\int_\Omega|f-f_N|^2$ は，定まった大きさ（有限!）をもつ $\int_\Omega|f|^2$ によっておさえられ，被積分函数が0に近づくから，この積分もまた0に近づく（すでに引用した収斂定理を参照）：

$$\int_\Omega|f-f_N|^2\to 0,\quad \|f-f_N\|\to 0.$$

つぎのような性質をもつすべての函数 $g=g(q_1\cdots\cdots q_k)$ の類を G とよぶことにする：$g\neq 0$ であるようなすべての点の集合は，有限の測度をもつ．そして g は全空間において，任意の定まったCに対して $|g|\leqq C$ をみたす．うえの f_N はすべてGに属するから，G は（F_Ω のなかで）いたるところ密である．

g はGに属するとし，$\varepsilon>0$ とする．$g\neq 0$ であるような集合の測度を M とし，$|g|$ の上限をCとしよう．有理数の鎖

$$-C<\rho_1<\rho_2<\cdots\cdots<\rho_t<C$$

を

$$\rho_1<-C+\varepsilon,\ \rho_2<\rho_1+\varepsilon,\ \cdots\cdots,\ \rho_t<\rho_{t-1}+\varepsilon_1$$
$$C<\rho_t+\varepsilon$$

が成り立つようにえらぶ．それは容易にできる．ここで各々の $\mathrm{Re}\,g(q_1\cdots\cdots q_k)$ の値を，それに最も近い $\rho_s(s=1,2,\cdots\cdots,t)$ に変える．ただ0はそのまま0にしておく．そうすると，新しい函数 $h_1(q_1\cdots\cdots q_k)$ ができるが，それは $\mathrm{Re}\,g$ からいたるところで $<\varepsilon$ だけしかちがわない．まったく同じように $\mathrm{Im}\,g$ に対して $h_2(q_1\cdots\cdots q_k)$ を作る．そうすると $h=h_1+ih_2$ に対してつぎの関係式が成り立つ：

$$\int_\Omega|g-h|^2=\int_\Omega|\mathrm{Re}\,g-h_1|^2+\int_\Omega|\mathrm{Im}\,g-h_2|^2\leqq \mathrm{M}\varepsilon^2+\mathrm{M}\varepsilon^2=2\mathrm{M}\varepsilon^2$$

$$\|g-h\|\leqq\sqrt{2\mathrm{M}}\,\varepsilon.$$

$\delta>0$ があたえられれば，$\varepsilon<\dfrac{\delta}{\sqrt{2\mathrm{M}}}$ とおいて

$$\|g-h\|<\delta$$

となる．

有限個の異った値，しかも $\rho+i\sigma$ （ρ, σ は有理数）という形をした値だけをとる函数で，かつそれが0を除くこれらすべての値をとる点の集合は有限の測度をもつような，すべての函数 $h=h(q_1\cdots\cdots q_k)$ の類を H とよぼう．うえの h は H に属しているから，H は G のなかでいたるところ密であり，したがってまた F_Ω のなかでもそうである．

Π を有限なルベーグ測度をもつ集合として，函数 $f_\Pi=f_\Pi(q_1\cdots\cdots q_k)$ を定義する：

$$f_\Pi(q_1\cdots\cdots q_k)=\begin{cases}1 & \Pi \text{ のなかで} \\ 0 & \text{その他のところで.}\end{cases}$$

類 H はあきらかに，すべての

$$\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi_s} \qquad (t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \rho_s,\ \sigma\ \text{有理数})$$

からできている．

われわれはこれから，つぎのような性質をもつ Π-集合の列 $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, ……を求める： 任意の Π-集合および任意の $\varepsilon>0$ に対して1つの $\Pi^{(n)}$ が存在して，Π に属するが $\Pi^{(n)}$ には属さない，あるいは $\Pi^{(n)}$ に属するが Π には属さないようなすべての点の集合（この集合は Π, $\Pi^{(n)}$ の差集合とよばれる）の測度が $<\varepsilon$ である．もしこのような集合列がえられたとすると，

$$\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi^{(n_s)}}.$$

$(t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \rho_s,\ \sigma_s$ は有理数，$n_s=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は H のなかでいたるところ密である．なぜなら，うえに述べたことにしたがって，もとの各 Π_s として $\Pi^{(n_s)}$ をえらぶと，つぎの関係式がえられる：

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega\left|\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+\sigma_s)f_{\Pi_s}-\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi^{(n_s)}}\right|^2 \\
&\leqq\sum_{s=1}^{t}\int_\Omega|(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi_s}-(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi^{(n_s)}}|^2 \\
&=\sum_{s=1}^{t}(\rho_s{}^2+\sigma_s{}^2)\cdot\int_\Omega|f_{\Pi_s}-f_{\Pi^{(n_s)}}|^2 \\
&=\sum_{s=1}^{t}(\rho_s{}^2+\sigma_s{}^2)\cdot\text{差集合}\quad(\Pi_s,\ \Pi^{(n_s)})\quad\text{の測度} \\
&<\sum_{s=1}^{t}(\rho_s{}^2+\sigma_s{}^2)\cdot\varepsilon
\end{aligned}$$

$\delta>0$ があたえられれば，

$$\varepsilon=\frac{\delta^2}{\sum_{s=1}^{t}(\rho_s^2+\sigma_s^2)}$$

ととることによって

$$\left\|\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi_s}-\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi^{(n_s)}}\right\|<\delta$$

がえられる．$\sum_{s=1}^{t}(\rho_s+i\sigma_s)f_{\Pi^{(n_s)}}$ は，もし正しく並べられれば，1つの列を作る．すなわち，すべての $\rho_1, \sigma_1, \cdots\cdots, \rho_t, \sigma_t$ の公分母を τ とよび，その分子を $\rho_1', \sigma_1', \cdots\cdots, \rho_t', \sigma_t'$ とすると，

$$\frac{1}{\tau}\sum_{s=1}^{t}(\rho_s'+i\sigma_s')f_{\Pi^{(n_s)}}$$

を問題にすることになる．ただし $t, \tau=1, 2, \cdots\cdots$; $\rho_s', \sigma_s'=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$; $s=1, \cdots\cdots, t$ に対して $n_s=1, 2, \cdots\cdots$. これらの函数を列に並べるのは，それらに現われる数，$t, \tau, \rho_1, \sigma_1, \cdots\cdots, \rho_t', \sigma_t', n_1, \cdots\cdots, n_t$ を列に並べることと同じ仕事である．そこでこの数の組を

$$t+\tau+|\rho_1'|+|\sigma_1'|+\cdots\cdots+|\rho_t'|+|\sigma_t'|+n_1+\cdots\cdots+n_t$$

が大きくなる順番に並べる．するとこの和のあたえられた値の各々には，うえの数の組が有限個だけ属する．さらにこの有限個の集合の各々をなんらかの順番に並べれば，実際に単純列がえられたことになる．

うえに述べた集合列 $\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}, \cdots\cdots$ を与えることができるのは，つぎの事実による．有限なルベーグ測度 M をもつ任意の集合 Π および任意の $\delta>0$ に対して，Π を含むがその測度は Π のそれを $<\delta$ しかこえないような，開いた点集合 Π' が存在する（上述の注 52）および注 45）を参照，そのなかでは“開いた点集合”という概念も定義されている）．ところがあきらかに開いた集合 Π' および $\varepsilon>0$ に対して，有限個の立方体から構成された集合で，Π' に含まれてその測度が Π' のそれより $<\delta$ だけ小さいような Π'' が存在する．そのさい，立方体の辺の長さおよび中心の座標は，すべて有理数であるようにえらぶ．ここでさきに定義した Π, Π'' の“差集合”が測度 $<\delta+\delta=2\delta$ をもつこと，それゆえ，$\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ では $<\varepsilon$ の測度をもつことが容易にわかる．したがって，ちょうどうえに述べたようなたぐいの立方体集合を，1つの列に並べることができれば，目的が達せられるわけである．

これらの立方体集合は，それに含まれる立方体の数および辺の長さ $\kappa^{(\nu)}$ と中心の座標 $\xi_1^{(\nu)}, \cdots\cdots, \xi_k^{(\nu)}$ $(\nu=1, \cdots\cdots, n)$ によって特徴づけられる．$\kappa^{(\nu)}$, $\xi_1^{(\nu)}, \cdots\cdots, \xi_k^{(\nu)}$ は有理数であるから，その公分母を $\eta=1, 2, \cdots\cdots$ とし，その分子を

$$\kappa'^{(\nu)}=1,\ 2, \cdots\cdots, \xi_1'^{(\nu)}, \cdots\cdots, \xi_k'^{(\nu)}=0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots\cdots$$

とする．そうすると，われわれの立方体集合は数の組，

$$n,\ \eta,\ \kappa'^{(1)},\ \xi_1'^{(1)}, \cdots\cdots, \xi_k'^{(\nu)}, \cdots\cdots, \kappa'^{(n)},\ \xi_1'^{(n)}, \cdots\cdots, \xi_k'^{(n)}$$

によって特徴づけられる．これらをその和

$$n+\eta+\kappa'^{(1)}+|\xi_1'^{(1)}|+\cdots\cdots+|\xi_k'^{(1)}|+\cdots\cdots+$$
$$+\kappa'^{(n)}+|\xi_1'^{(n)}|+\cdots\cdots+|\xi_k'^{(n)}|,$$

が大きくなる順番に並べれば，まえの函数の1次結合の集りの場合とまったく同様に単純な列がえられる．

さきへ進むまえに，つぎの問題に答えておこう：**A.**－**E.**（**C**$^{(\infty)}$. と）をみたす $\mathfrak{R}$ があたえられたとき，$\mathfrak{R}$ のいかなる部分集合 $\mathfrak{M}$ が〔af, $f\pm g$ および (f, g) の定義は変いないで〕また **A.**－**E.** をみたすであろうか?

A が成り立つためには，$\mathfrak{M}$ は線型多様体でなければならない．**B** はひとりでに成り立つ．**C.** はしばらくおいておく：いずれにせよ **C**$^{(n)}$. あるいは **C**$^{(\infty)}$. が成り立つ．**D.** は，$\mathfrak{M}$ のなかのある点列が Cauchy の収斂条件をみたすならば，それは $\mathfrak{M}$ のなかに極限をもつことを意味する．

このような点列は，いかなる場合にも $\mathfrak{R}$ のなかに極限をもっているから，この極限がまた $\mathfrak{M}$ にも属することだけを問題にすればよい．すなわち，$\mathfrak{M}$ は閉じていなければならない．**E.** は，定理 *9* の証明のさいに見たように，いつも成立する．したがって，まとめて言うと，$\mathfrak{M}$ は閉じた線型多様体でなければならないということになる．$\mathfrak{M}$ を張る（定理 *9*）規格化された直交系を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ としよう．もしそれが無限であれば，明らかに **C**$^{(\infty)}$. が成り立つから $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{R}_\infty$ である．したがってそれは $\mathfrak{R}$ 自体に同型である．それが φ_n で途切れるならば $(\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_n)$, **C**$^{(n)}$. が成り立つ（たとえば定理 *3*$^{(n)}$ によって），すなわち，$\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{R}_n$ に同型である．

D., **E.** はどんな場合にも $\mathfrak{M}$ において成り立つから，それらはすべての $\mathfrak{R}_n$ において成り立つ．だから，それらは **A.**－**C**$^{(n)}$. からも導かれるのである．

みてわかるとおり，われわれは論理的なテクニックによって，$\mathfrak{R}_n$ あるいは $\mathfrak{R}_\infty$ における **A.**－**E.**（**C**$^{(n)}$. あるいは **C**$^{(\infty)}$. を含めた）を直接証明するのを

さけた．しかし直接証明することも，なんら本質的な困難をきたすものではない．それは読者にまかせておく．

まだ残っているのは，**D.** および **E.** の **A.**－$C^{(\infty)}$. からの独立性を示すことである．たったいまみたように，$\mathfrak{R}_\infty$ のあらゆる線型多様体は，**A. B. E.** および $C^{(n)}$. あるいは $C^{(\infty)}$. をみたすが，もしそれが閉じていなければ，それは **D** をみたさない．しかしそのときには，その線型多様体のなかでは $C^{(\infty)}$. が成り立たなければならない．というのは $C^{(n)}$. から **D** が導かれるからである．このような例をあげることはやさしい：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を規格化直交系とする．すると，

$$\sum_{\nu=1}^{N} x_\nu \varphi_\nu \quad (N=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ x_1,\ \cdots\cdots,\ x_N\ \text{は任意})$$

は1つの線型多様体を作るが，それは閉じていない．なぜなら，
$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\varphi_\nu$ $\left(\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\ \text{は有限!!}\right)$ は，それの要素ではないが，まさしく集積点である．

$$\left(N\to\infty\ \text{のとき}\ \sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu}\varphi_\nu \to \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\varphi_\nu\right)$$

したがって **D.** は **A.**－$C^{(\infty)}$.，**E.** と独立である．

さらにそのパラメーターが連続であるような，すべての複素函数 $x(\alpha)$ を考える：$-\infty<\alpha<+\infty$．そのさい，$x(\alpha)\neq 0$ を1つの列に書くことができるとし，その列についてとった $\sum_{\alpha}|x(\alpha)|^2$ が有限であるとしよう[55]．これらの函数 $x(\alpha)$ のすべては1つの空間 $\mathfrak{R}_{kont}$ を作る．その空間の任意の2つの点 $x(\alpha), y(\alpha)$ をとると，ただ2つの α-列に対してのみ $x(\alpha)$ および $y(\alpha)\neq 0$ であり，この2つの列を1つの列に合併することができるから，ある1つの α-列，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ を除いては，つねに $x(\alpha)=y(\alpha)=0$ である．したがって，すべての $n=1, 2, \cdots\cdots$ に対する $x_n=x(\alpha_n)$，$y_n=y(\alpha_n)$ という値だけを論ずればよいが，そうすると2つの $\mathfrak{R}_{kont}$-点だけに関するかぎり，すべて $\mathfrak{R}_\infty$ におけると同じ事情になる．それゆえ **A.**，**B.** は，$\mathfrak{R}_\infty$ におけるとまったく同様に $\mathfrak{R}_{kont}$ においても成り立つ[56]．$k(=1, 2, \cdots\cdots)$ 個の $\mathfrak{R}_{kont}$-点の場合もま

55) α は連続的に変化するけれども，これは和であって積分ではない．というのは，この α の列だけしか和のなかに現われてこないから．

56) $(x(\alpha), y(\alpha))$ は，当然 $\sum_{\alpha} x(\alpha)\overline{y(\alpha)}$ と定義される．

ったく同じであるから，$C^{(\infty)}$. もまた成り立つ．また $\mathfrak{R}_{kont}$-点の列についても，そのとおりである．それらを $x_1(\alpha)$, $x_2(\alpha)$, ……，とする．$x_n(\alpha)\neq 0$ のようなαは，各々の $n=1, 2, \cdots\cdots$ に対して，1つの列 $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}$, …… を作る．これらの列のすべては一緒にすると，2重列 $\alpha_m^{(n)}$ ($n, m=1, 2, \cdots\cdots$) を作るが，それはまた単純列 $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$, $\alpha_1^{(3)}$, …… として書くことができる——したがって $\mathfrak{R}_\infty$ におけるとまったく同様に，$\mathfrak{R}_{kont}$ において **D** もまた成り立つ．**E** の場合はちがう：

E は $\mathfrak{R}$ のすべての点にかかわるものである（あらゆる点がある適当な点列の集積点でなければならない）．したがって，ここでは $\mathfrak{R}_\infty$ から $\mathfrak{R}_{kont}$ について結論することはできない．事実**E**はみたされていない．なぜなら，それからの1つの帰結が成り立たないからである：（定理 $3^{(\infty)}$ に反して）点列として書くことができないような，規格化直交系が存在するのである．

$$x_\beta(\alpha)=\begin{cases}1 & \alpha=\beta \text{ のとき}\\ 0 & \alpha\neq\beta \text{ のとき}\end{cases}$$

とする．任意の β に対して $x_\beta(\alpha)$ は $\mathfrak{R}_{kont}$ の1つの要素であり，この $x_\beta(\alpha)$ は規格化直交系を作る．しかし，これが列として書けるのは，すべての $-\infty<\beta<+\infty$ に対してそれが可能であるときに限るが，明らかにそんなことはけっしてありえない[57]．したがって **E** はまた **A.**−$C^{(\infty)}$., **D** から独立である．

（なお，有限な $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$ をもつ $f(x)$ の函数空間と，有限な $\sum_\alpha|x(\alpha)|^2$ をもつ $x(\alpha)$ のそれとのあいだの根本的な相違に注意しよう．たしかに，最初の空間を，有限な $\int_{-\infty}^{\infty}|x(\alpha)|^2d\alpha$ をもつすべての $x(\alpha)$ の空間として表わすこともまたできたであろう！そのちがいはすべて $\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots d\alpha$ を $\sum_\alpha\cdots\cdots$ でおきかえるところにある．にもかゝわらず第1の空間は F_Ω であって，**A.**−**E.** をみたし，$\mathfrak{R}_\infty$ に同型であるが，それに反して，あとの方 $\mathfrak{R}_{kont}$ は **E** をみたさず，$\mathfrak{R}_\infty$ と本質的に異っている．この場合，両方の空間は同一である．たゞ両者におけるノルムの定義がちがっているのみである！）．

4. 閉じた線型多様体

II.2 節は，そこで同型性が証明されたというだけでなく，規格化直交系に

57) これは"数の連続体"についての集合論の定理である．たとえば注 45) にあげた Hausdorff の本を参照．

関する多くの定理が証明されたという意味でも重要である．つぎにわれわれは，ヒルベルト空間をさらに立ちいって幾何学的に分析し，$\mathfrak{R}_\infty$ において，$\mathfrak{R}_n$ における直線，平面等々（すなわち，$\mathfrak{R}_m$, $m\leq n$），と類似の役割をはたす閉じた線型多様体についてさらに詳しく研究しようと思う．

まず第1に定義 *2* および *5* で使った記号を思い出そう：$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{R}$ のなかの任意の集合であるとき，$\{\mathfrak{A}\}$ および $[\mathfrak{A}]$ はそれぞれ $\mathfrak{A}$ によって張られる線型多様体および閉じた線型多様体である．すなわち，そのような構成物のうち $\mathfrak{A}$ を含む最小のものである．いまこの記号を拡張して，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\cdots$ を $\mathfrak{R}$ のある部分集合，$f, g, \cdots\cdots$ を $\mathfrak{R}$ の要素としたとき，$\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\cdots, f, g\cdots\cdots\}$ あるいは $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\cdots, f, g, \cdots\cdots]$ はそれぞれ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \cdots\cdots$ および $f, g, \cdots\cdots$ を合わせてできる集合によって張られる線型多様体あるいは閉じた線型多様体であるとする．とくに，$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots$ が（有限個もしくは無限に多い）閉じた線型多様体であるとき，閉じた線型多様体 $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots]$ を $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}+\cdots\cdots$ で表わす．明らかに，$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots\}$ は和 $f+g+\cdots\cdots$（f は $\mathfrak{M}$ のなかを動き，g は $\mathfrak{N}$ のなかを動く，$\cdots\cdots$）のすべてからなり，$[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots]=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}+\cdots\cdots$ はこれに集積点をつけ加えてできる．集合 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\cdots\cdots$ が有限個しかなく，しかもそれらの1つの各要素が残りのもののすべての要素と直交するときには，まもなくわかるように，うえの2種類の線型多様体はたがいに等しい．しかし，一般の場合には必ずしもそうはならない．

$\mathfrak{M}$ が $\mathfrak{R}$ の部分集合のとき，$\mathfrak{M}$ のすべての要素に直交するような $\mathfrak{R}$ の要素の全体を考える．あきらかに，これもまた閉じた線型多様体であって，$\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ と書くことができる．これをひき算の記号で表すことの根拠については，定理 *14* が明らかにするであろう．とくに重要なのは $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$，すなわち $\mathfrak{M}$ 全体に直交するすべての f の集合であって，これは $\mathfrak{M}$ の補集合をなす閉じた線型多様体とよばれる．

おわりに，とくに簡単な閉じた線型多様体を3つあげる．第1は $\mathfrak{R}$ 自身である．第2は0だけからできている集合 $\{0\}=[0]$ である．第3はすべての af（f は $\mathfrak{R}$ の与えられた要素，a は変化する数）の集合で，これは明らかに閉じた線型多様体であり，それゆえ $\{f\}=[f]$ に等しい．

ここで“射影”という概念を導入するが，これはユークリッド幾何学のそれと完全に類比的である；

<u>定　理 *10*</u>　$\mathfrak{M}$ をある閉じた線型多様体とすると，すべての f は，1通

りの，しかもただ1通りの方法で，$\mathfrak{M}$ に属する g と $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する h との2つの和 $f=g+h$ に分けることができる.

注　意：われわれは g を f の $\mathfrak{M}$ への射影となづけ，h ($\mathfrak{M}$ 全体に直交する) を f の $\mathfrak{M}$ への垂線となづける. g に対しては $P_{\mathfrak{M}}f$ という記号を導入する.

証　明：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ を張る規格化直交系とする. それの存在は定理 9 によって保証される.

$$g=\sum_n (f, \varphi_n)\cdot\varphi_n$$

とおくと，この級数は（概して無限に続くが）定理 6 によって収斂し，その和 g は明らかに $\mathfrak{M}$ に属する. さらに，定理 6 によって $h=f-g$ はすべての $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に直交するが，h に直交するベクトルは1つの閉じた線型多様体を作るから，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ とともに $\mathfrak{M}$ 全体もまた h に直交する. すなわち，h は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する.

ほかになお，$\mathfrak{M}$ に属する g' と $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する h' への分割 $f=g'+h'$ があったとすれば

$$g+h=g'+h',$$
$$g-g'=h'-h=j,$$

したがって，j は同時に $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ とに属さなければならないから，自分自身に直交する：

$$(j, j)=0,\quad j=0,$$

ゆえに

$$g=g',\quad h=h'$$

である.

したがって $P_{\mathfrak{M}}f$ は，$\mathfrak{R}$ のすべての f にそれの $\mathfrak{M}$ への射影 $P_{\mathfrak{M}}f$ を対応させる1つの操作である. われわれはつぎの節でつぎのような定義を与える：作用素 R とは $\mathfrak{R}$ の部分集合のなかで定義され，$\mathfrak{R}$ に属する値をとる1つの函数である. すなわち，$\mathfrak{R}$ に属するある f（必ずしもすべての f でなく，$\mathfrak{R}$ に属する他の f に対しては定義されず，"無意味" であることもできる）を $\mathfrak{R}$ のある Rf に対応させることである. そうすると $P_{\mathfrak{M}}$ は（$\mathfrak{R}$ において）いたるところで定義される作用素である. そして $\mathfrak{M}$ の射影作用素とよばれる.

定　理 *11*　　作用素 $P_{\mathfrak{M}}$ はつぎの性質をもっている.

$$P_{\mathfrak{M}}(a_1f_1+\cdots\cdots+a_nf_n)=a_1P_{\mathfrak{M}}f_1+\cdots\cdots+a_nP_{\mathfrak{M}}f_n,$$
$$(P_{\mathfrak{M}}f,g)=(f,P_{\mathfrak{M}}g),$$
$$P_{\mathfrak{M}}(P_{\mathfrak{M}}f)=P_{\mathfrak{M}}f.$$

$\mathfrak{M}$ は $P_{\mathfrak{M}}$ の値のすべての集合，すなわち，すべての $P_{\mathfrak{M}}f$ の集合である．しかし，これはまた

$$P_{\mathfrak{M}}f=f$$

の解のすべての集合とみることもできる．他方の $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ は

$$P_{\mathfrak{M}}f=0$$

のすべての解の集合である．

注　意：つぎの節で，この第1の性質はいわゆる線型作用素を特徴づけ，第2はいわゆるエルミート作用素を特徴づけるものであることがわかる．第3は，作用素 $P_{\mathfrak{M}}$ を2回ほどこすことは1回ほどこすことと変らない，ということを表わす．——このことを表わすのに，つぎの記号的表現が一般によく使われる．

$$P_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{M}}=P_{\mathfrak{M}}\quad あるいは\quad P_{\mathfrak{M}}^2=P_{\mathfrak{M}}$$

証　明：
$$f_1=g_1+h_1,\ \cdots\cdots,\ f_n=g_n+h_n$$
($g_1,\cdots\cdots,g_n$ は $\mathfrak{M}$ に，$h_1,\cdots\cdots,h_n$ は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する)

から

$$a_1f_1+\cdots\cdots+a_nf_n=(a_1g_1+\cdots\cdots+a_ng_n)+(a_1h_1+\cdots\cdots+a_nh_n)$$
($ag_1+\cdots\cdots+a_ng_n$ は $\mathfrak{M}$ に，$a_1h_1+\cdots\cdots+a_nh_n$ は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する)

がえられる．したがって

$$P_{\mathfrak{M}}(a_1f_1+\cdots\cdots+a_nf_n)=a_1g_1+\cdots\cdots+a_ng_n$$
$$=a_1P_{\mathfrak{M}}f_1+\cdots\cdots+a_nP_{\mathfrak{M}}f_n,$$

これは第1の式である．

第2は：

$$f=g'+h',\ g=g''+h''$$
($g',\ g''$ は $\mathfrak{M}$ に，$h',\ h''$ は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する)

とすると $g',\ g''$ は $h',\ h''$ に直交するから

$$(g',g)=(g',g''+h'')=(g',g'')=(g'+h',g'')=(f,g''),$$

すなわち

$$(P_{\mathfrak{M}}f,g)=(f,P_{\mathfrak{M}}g).$$

これは第2の式である．

最後に，$P_{\mathfrak{M}}f$ は $\mathfrak{M}$ に属するから，定理 *10* によって保証される分割を $P_{\mathfrak{M}}f$ にあてはめて

$$P_{\mathfrak{M}}f=P_{\mathfrak{M}}f+0,$$

すなわち,

$$P_{\mathfrak{M}}(P_{\mathfrak{M}}f)=P_{\mathfrak{M}}f.$$

これは第3の式である.

$$P_{\mathfrak{M}}f=f \quad \text{あるいは} \quad =0$$

は $\mathfrak{M}$ に属する g と $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する h への分割 (定理 *10*).

$$f=g+h$$

において, それぞれ

$$f=g,\ \ h=0$$

あるいは

$$g=0,\ \ f=h$$

となるべきこと, すなわち, f は $\mathfrak{M}$ または $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属するということを意味する. これは第5および第6の主張である. すべての $P_{\mathfrak{M}}f$ は定義によって $\mathfrak{M}$ に属し, $\mathfrak{M}$ に属する f' はすべてある $P_{\mathfrak{M}}f$, 例えば, いまいったことによって $P_{\mathfrak{M}}f'$ に等しい. これが第4の主張である.——

なお, この定理の第2および第3の式から

$$(P_{\mathfrak{M}}f, P_{\mathfrak{M}}g)=(f, P_{\mathfrak{M}}P_{\mathfrak{M}}g)=(f, P_{\mathfrak{M}}g)=(P_{\mathfrak{M}}f, g)$$

が導かれることを注意しておく.

ここで, 射影作用素 $P_{\mathfrak{M}}$ の $\mathfrak{M}$ に依存しないような定義を与えよう.

<u>定 理 *12*</u>　いたるところで意味をもつ作用素 E (定理 *11* の直前に述べたところを参照) は, つぎの性質

$$(Ef, g)=(f, Eg), \qquad E^2=E$$

(定理 *11* への注意を参照) をもつとき, そしてそのときにのみ, 射影作用素である. すなわち, ある適当な閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ について $E=P_{\mathfrak{M}}$ となる. そして, このとき $\mathfrak{M}$ は E によって一義的に決定される (定理 *11* による).

<u>証 明</u>: この条件が必要であることも, $\mathfrak{M}$ が E によって決定されることも, 定理 *11* から明らかである. したがって, E がうえの性質をもつならば, $E=P_{\mathfrak{M}}$ となるような1つの閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ が存在するということを示すだけでよい.

$\mathfrak{M}$ はすべての Ef によって張られる閉じた線型多様体であるとする. $g-Eg$ はすべての Ef に直交する:

$$(Ef, g-Eg)=(Ef, g)-(Ef, Eg)=(Ef, g)-(E^2f, g)=0$$

$g-Eg$ に直交する $\mathfrak{R}$ の要素は1つの閉じた線型多様体をつくるから，それは Ef とともに $\mathfrak{M}$ をも包含する——したがって，$g-Eg$ は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属する．こうして g の $\mathfrak{M}$ に属する分割は，

$$g=Eg+(g-Eg)$$

となり，したがって

$$P_{\mathfrak{M}}g=Eg$$

である．ここに g に任意であったから，すべてが証明されたわけである．——

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{R} \quad \text{あるいは} \quad =[0]$$

ならば，それぞれ

$$\mathfrak{R}-\mathfrak{M}=[0], \quad \text{あるいは} \quad \mathfrak{R}.$$

したがって，分割は定理 *11* によって

$$f=f+0, \quad \text{あるいは} \quad =0+f;$$

すなわち，このときには

$$P_{\mathfrak{M}}f=f \quad \text{あるいは} \quad =0$$

である．

$$Rf=f$$

によって定義される（いたるところで意味をもつ!）作用素を **1** と書き，

$$Rf=0$$

によって定義されるそれを 0 と書く．そうすると

$$P_{\mathfrak{R}}=\mathbf{1}, \quad P_{[0]}=0$$

さらに，$\mathfrak{M}$ に属する分割

$$f=g+h$$

（g は $\mathfrak{M}$ に属し，h は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属す）は

$$f=h+g$$

（h は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属し，g は $\mathfrak{M}$ に属す）の形に書いて $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に対して適用することもできるということは明らかである（なぜなら，g は $\mathfrak{M}$ に属するから $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ の各要素に直交し，したがってそれは $\mathfrak{R}-(\mathfrak{R}-\mathfrak{M})$ に属するからである）．

このことから

$$P_{\mathfrak{M}}f=g, \quad P_{\mathfrak{R}-\mathfrak{M}}f=h=f-g,$$

すなわち，

$$P_{\mathfrak{R}\ \ \mathfrak{M}}g=f-P_{\mathfrak{M}}f$$

この事実；$P_{\mathfrak{R}\ \ \mathfrak{M}}f=\mathbf{1}f-P_{\mathfrak{M}}f$ をわれわれは記号的に

$$P_{\mathfrak{R}\ \ \mathfrak{M}}=\mathbf{1}-P_{\mathfrak{M}}$$

と表わす（作用素の加法，減法，乗法については定理 *14* の詳論をみよ）．さきほどわれわれは簡単に $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{R}-(\mathfrak{R}-\mathfrak{M})$ の部分集合であることを知ったが，2つの集合が等しいことを直接証明するのは難しい．しかしながら，それは

$$P_{\mathfrak{R}-\ \mathfrak{R}-\mathfrak{M},}=\mathbf{1}-P_{\mathfrak{R}-\mathfrak{M}}=\mathbf{1}-(\mathbf{1}-P_{\mathfrak{M}})=P_{\mathfrak{M}}$$

からならば，ただちに導かれる．

なお，上述のことがらから，E とともに $\mathbf{1}-E$ もまた射影作用素であり，また $\mathbf{1}-(\mathbf{1}-E)=E$ によって，その逆もまた成り立つことがわかる．

定　理 *13*　　つねに

$$\|Ef\|^2=(Ef,f),\quad \|Ef\|\leqq\|f\|$$

であり，

$$\|Ef\|=0,\ \text{あるいは}\ \ =\|f\|$$

はそれぞれ $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ または $\mathfrak{M}$ に属する f を特徴づける．

注　意：したがって，なかんずく

$$\|Ef-Eg\|=\|E(f-g)\|\leqq\|f-g\|,$$

すなわち作用素 E は連続である（II.1. の定理 *2* に続く詳論をみよ）．

証　明：　$\|Ef\|^2=(Ef,Ef)=(Ef,f)$

（定理 *11* のあとに述べたことを参照）．$\mathbf{1}-E$ も射影作用素であるから，

$$\begin{aligned}\|Ef\|^2+\|f-Ef\|^2&=\|Ef\|^2+\|(1-E)f\|^2\\&=(Ef,f)+((1-E)f,f)\\&=(f,f)=\|f\|^2.\end{aligned}$$

左辺の2つの項は $\geqq0$ であるから，それらはまた $\leqq\|f\|^2$，とりわけ

$$\|Ef\|^2\leqq\|f\|^2,\quad \|Ef\|\leqq\|f\|$$

である．定理 *11* からわかるように，

$$\|Ef\|=0,\quad Ef=0$$

は f が $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に属することを表わす．

$$\|Ef\|=\|f\|$$

は，うえの関係のために

$$\|f-Ef\|=0,\quad Ef=f$$

を意味し，したがって定理 *11* によって f は $\mathfrak{M}$ に属する.——

R, S が2つの作用素であるとき，われわれは

$$R \pm S,\quad aR\ (a\ \text{は複素数}),\quad RS$$

を

$$(R \pm S)f = Rf \pm Sf,\quad (aR)f = a \cdot Rf,\quad (RS)f = R(Sf)$$

で定義される作用素であると了解する．また

$$R^0 = 1,\quad R^1 = R,\quad R^2 = RR,\quad R^3 = RRR, \cdots\cdots$$

とおくことはしぜんである．これらに対して成り立つ算法規則を論ずるのはたやすい． $R \pm S$, aS については，数に対して成り立つ初等的な演算法則がすべて難なく証明される．しかし RS に対しては，そうでない．分配則がそのまま成り立つことは証明できる：

$$(R \pm S)T = RT \pm ST,$$
$$R(S \pm T) = RS \pm RT.$$

(あとの式に対してはもちろん R の線型性が必要である．定理 *11* への注意および，つぎの節で述べることを参照)．結合則についても同様：

$$(RS)T = R(ST) = RST$$

しかし交換則

$$RS = SR$$

は一般には成り立たない[$(RS)f = R(Sf)$ と $(SR)f = S(Rf)$ とはたがいに等しいとはかぎらない!]．それが特別の R, S に対して成り立てば，この2つは交換可能であるといわれる．そうすると，たとえば 0 と $\mathbf{1}$ とは，すべてのいたるところで意味をもつ R と交換可能である：

$$R0 = 0R = 0,\quad R\mathbf{1} = \mathbf{1}R = R.$$

あるいはまた，

$$R^m R^n = R^{m+n}$$

であって，これは m と n の順序には関係しないから，R^m と R^n とも交換可能である．

<u>定　理 *14*</u>　　E, F は射影作用素，しかも閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ のそれであるとする．E と F とが交換可能すなわち

$$EF = FE$$

のとき，そしてそのときにのみ，EF もまた射影作用素である．そのときそれは，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ との共通要素からなる閉じた線型多様体 $\mathfrak{P}$ に属する．$E+F$

は，

$$EF=0$$

であるとき（あるいは $FE=0$ のとき），そしてそのときにのみ，射影作用素である．この条件は，$\mathfrak{M}$ 全体が $\mathfrak{N}$ 全体に直交することを意味し，したがってこのとき $E+F$ は

$$\mathfrak{M}+\mathfrak{N}=[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]$$

（この場合 $\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ に等しい）に属する．$E-F$ は

$$EF=F$$

のとき（あるいはまた $FE=F$ のとき）そしてそのときにのみ，射影作用素である．これは $\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}$ の部分集合であることを意味し，このとき $E-F$ は $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ に属する．

証　明：EF に関しては，定理 *12* の 2 つの条件

$$(EFf,g)=(f,EFg),$$
$$(EF)^2=EF$$

を験証しなければならない．

$$(EFf,g)=(Ff,Eg)=(f,FEg)$$

によって，第 1 の条件が表しているのは

$$(f,EFg)=(f,FEg),\qquad (f,(EF-FE)g)=0$$

ということである．これがすべての f に対して成り立つから

$$(EF-FE)g=0.$$

これがすべての g に対して成り立つから

$$EF-FE=0,\qquad EF=FE.$$

したがって，交換可能性は第 1 の条件に対してすでに必要かつ十分であるが，第 2 の条件もまたそれの帰結である：

$$(EF)^2=EFEF=EEFF=E^2F^2=EF.$$

$E+F$ はつねに条件

$$((E+F)f,g)=(f,(E+F)g)$$

をみたす（E, F がそうだから）から，第 2 の条件

$$(E+F)^2=E+F$$

だけを験証すればよい．

$$(E+F)^2=E^2+F^2+EF+FE$$
$$=(E+F)+(EF+FE)$$

であるから，この条件は単に

$$EF+FE=0$$

を意味するだけである．ところで，$EF=0$ であるとき EF は，射影作用素であり，したがって，いまさきに証明したところによって

$$EF=FE,$$

したがって，

$$EF+FE=0.$$

逆に $EF+FE=0$ から

$$E(EF+FE)=E^2F+EFE=EF+EFE=0$$

$$E(EF+FE)E=E^2FE+EFE^2=EFE+EFE=2\cdot EFE=0$$

が導かれる．したがって

$$EFE=0,$$

ゆえに

$$EF=0.$$

したがって，$EF=0$, あるいは，E と F とは同じ役割を果しているから $FE=0$, が必要かつ十分な条件である．

$E-F$ は

$$1-(E-F)=(1-E)+F$$

が射影作用素であるとき，そしてそのときにのみ，射影作用素である．ところで，$1-E$, F は射影作用素であるから，$(1-E)+F$ が射影作用素であるためには，うえに証明したことによって，

$$(1-E)F=0,\quad F-EF=0,$$

$$EF=F$$

でなければならない．あるいは

$$F(1-E)=0,\quad F-FE=0,\quad FE=F$$

でもよい．

われわれはまだ $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ についての主張 ($E=P_{\mathfrak{M}}$, $F=P_{\mathfrak{N}}$) を証明しなければならない．第1に $EF=FE$ としよう．すると，すべての $EFf=FEf$ は $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ とに，したがって $\mathfrak{P}$ に属する．また $\mathfrak{P}$ に属する各々の g に対して

$$Eg=Fg=g,$$

したがって

$$EFg=Eg=g,$$

すなわち，それは EFf の形をとる．かくして $\mathfrak{P}$ は EF の値域であり，したがって定理 *11* によって

$$EF=P_{\mathfrak{P}},$$

つぎに，

$$EF=0$$

（したがってまた $FE=0$）とする．すべての

$$(E+F)f=Ef+Ff$$

は $\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ に属し，$\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ に属する各 g は，h は $\mathfrak{M}$ に属し j は $\mathfrak{N}$ に属するとして，

$$h+j$$

に等しい．ここに

$$Eh=h,\quad Fh=FEh=0,$$
$$Fj=j,\quad Ej=EFj=0$$

である．ゆえに

$$(E+F)(h+j)=Eh+Fh+Ej+Fj=h+j,\quad (E+F)g=g,$$

したがって g は $(E+F)f$ の形をとる．かくして $\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ は $E+F$ の値域であるが，$E+F$ は射影作用素であるから，$\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ はそれに属する閉じた線型多様体である（定理 *11*）．$\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}$ は閉じているから，

$$\{\mathfrak{M},\mathfrak{N}\}=[\mathfrak{M},\mathfrak{N}]=\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$$

である．3番目に

$$EF=F$$

とする（したがってまた $FE=F$）．そうすると

$$E=P_{\mathfrak{M}},\quad 1-F=P_{\mathfrak{R}-\mathfrak{N}},$$

したがって

$$E-F=E-EF=E(1-F)$$

は $P_{\mathfrak{P}}$ に等しい．ここに $\mathfrak{P}$ は $\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{R}-\mathfrak{N}$ との共通部分，すなわち $\mathfrak{M}-\mathfrak{N}$ である．

最後に，

$$EF=0$$

は，いつも

$$(EFf,g)=0$$

であること，すなわち

$$(Ff,\ Eg)=0,$$

すなわちまた，$\mathfrak{M}$ 全体が $\mathfrak{N}$ 全体に直交することを意味している．また

$$EF=F$$

は，

$$F(1-E)=0,$$

すなわち，$\mathfrak{N}$ 全体が $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に直交すること，あるいはまた，$\mathfrak{N}$ が

$$\mathfrak{R}-(\mathfrak{R}-\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$$

の部分集合であることを意味している.——

$\mathfrak{N}$ が $\mathfrak{M}$ の部分集合であるときには，$F=P_{\mathfrak{N}}$，$E=P_{\mathfrak{M}}$ についても，F はE の部分であるといい，

$$E\geqq F \text{ あるいは } F\leqq E$$

という記号で表わすことにしよう（したがって，これは

$$EF=F \quad \text{あるいは} \quad FE=F$$

を意味し，その結果としてEとFとは交換可能である．$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ を考察することによって，あるいは直接の計算によって，つぎのことが認められる：つねに

$$0\leqq E\leqq 1.$$

$$E\leqq F,\ F\leqq E$$

からの帰結として

$$E=F,$$

$$E\leqq F,\ F\leqq G$$

から

$$E\leqq G$$

がえられる．したがって，われわれの $\leqq$ は“大きさの順序づけ”の性質をもっている．さらに

$$E\leqq F,\ 1-E\geqq 1-F \text{ および } E \text{ は } 1-F \text{ に直交する}$$

の3つはすべて同等であることに注意する．さらに，

$$E'\leqq E,\ F'\leqq F$$

ならば，E と F との直交性から E' と F' との直交性が導かれる)．$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ が直交するときには，EとFも直交するという（したがって，これは，

$$EF=0 \quad \text{あるいは} \quad FE=0$$

を意味する)．逆に，EとFとが交換可能のときには，それらに対応する $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ も交換可能であるということにしよう．

<u>定　理 *15*</u>　　　　$E\leqq F$

は，つねに

$$\|Ef\| \leqq \|Ff\|$$

が成り立つということと同等の意味をもつ.

証 明：

$$E \leqq F$$

から，

$$E = EF$$

がでてくる. ゆえに（定理 *13* をみよ）

$$\|Ef\| = \|EFf\| \leqq \|Ff\|.$$

逆にこの関係式の結果として，

$$Ff = 0$$

ならば，

$$\|Ef\| \leqq \|Ff\| = 0, \quad Ef = 0.$$

さらに

$$F(1-F)f = (F-F^2)f = 0$$

によって恒等的に

$$E(1-F)f = 0,$$

すなわち

$$E(1-F) = E - EF = 0, \quad E = EF.$$

ゆえに

$$E \leqq F.$$

定 理 *16*

$$E_1, \cdots\cdots, E_k$$

を射影作用素とすれば，

$$E_1 + \cdots\cdots + E_k$$

がまた１つの射影作用素であるのは，すべての E_m, E_l ($m, l = 1, \cdots\cdots, k$, $m \neq l$) がたがいに直交するとき，そしてそのときだけである. もう 1 つの必要かつ十分な条件は

$$\|E_1 f\|^2 + \cdots\cdots + \|E_k f\|^2 \leqq \|f\|^2$$

（あらゆる f について）である. なおこのとき，

$$E_1 + \cdots\cdots + E_k$$

は，いまの場合 $\{\mathfrak{M}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{M}_k\}$ に等しい

$$\mathfrak{M}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{M}_k = [\mathfrak{M}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{M}_k]$$

の射影作用素である ($E_1 = P_{\mathfrak{M}_1}, \cdots\cdots, E_k = P_{\mathfrak{M}_k}$).

証　明：この最後の主張は，第1の判定条件が十分であることとともに，定理 *14* をくりかえし適用することによって証明される．第2の判定条件が満足されているときには，第1もまたみたされる：$m \neq l$，$E_m f=f$ に対して

$$\|f\|^2+\|E_l f\|^2=\|E_m f\|^2+\|E_l f\|^2 \leqq \|E_1 f\|^2+\cdots\cdots+\|E_k f\|^2 \leqq \|f\|^2,$$

$$\|E_l f\|^2=0,\quad E_l f=0.$$

しかるに，

$$E_m(E_m f)=E_m f$$

が恒等的に成り立つから

$$E_l(E_m f)=0 \quad \text{すなわち} \quad E_l E_m=0.$$

最後に，第2の条件は必要である：$E_1+\cdots\cdots+E_k$ が射影作用素であれば，

$$\|E_1 f\|^2+\cdots\cdots+\|E_k f\|^2=(E_1 f, f)+\cdots\cdots+(E_k f, f)$$
$$=((E_1+\cdots\cdots+E_k)f, f)=\|(E_1+\cdots\cdots+E_k)f\|^2 \leqq \|f\|^2$$

である（定理 *13*）．こうしてつぎの論理的な図式がえられた：

$E_1+\cdots\cdots+E_k$ は射影作用素→第2の判定条件→第1の判定条件→$E_1+\cdots$ $\cdots+E_k$ は射影作用素．

したがって3つはすべて同等である．

おわりに，もう1つ射影作用素の収斂にかんする定理を証明する．

定　理 *17*　　$E_1, E_2, \cdots\cdots$ を射影作用素の上昇または下降列とする：

$$E_1 \leqq E_2 \leqq \cdots\cdots \quad \text{または} \quad E_1 \geqq E_2 \geqq \cdots\cdots,$$

そのとき，これはつぎの意味で1つの射影作用素Eに収斂する．すなわち，すべての f に対して

$$E_n f \to Ef.$$

しかもすべてのnについて

$$E_n \leqq E, \quad \text{あるいは} \quad E_n \geqq E.$$

証　明：第1の場合は $E_1, E_2, \cdots\cdots$ を $1-E_1, 1-E_2, \cdots\cdots$ でおきかえれば第2の場合に帰着させることができるから，第2の場合を調べれば十分である．それで $E_1 \geqq E_2 \geqq \cdots\cdots$ とする．

定理 *15* によって

$$\|E_1 f\|^2 \geqq \|E_2 f\|^2 \geqq \cdots\cdots \geqq 0$$

であるから $\lim_{m\to\infty}\|E_m f\|^2$ が存在する．したがって各 $\varepsilon>0$ に対して，ある $N=N(\varepsilon)$ が存在して，$m, l \geqq N$ に対して

$$|\|E_m f\|^2-\|E_l f\|^2|<\varepsilon$$

となる. ところで, $m \leqq l$ に対して $E_m \geqq E_l$ であり, $E_m - E_l$ は射影作用素であるから,

$$\|E_m f\|^2 - \|E_l f\|^2 = (E_m f, f) - (E_l f, f) = ((E_m - E_l)f, f)$$
$$= \|(E_m - E_l)f\|^2 = \|E_m f - E_l f\|^2.$$

これから

$$\|E_m f - E_l f\| < \sqrt{\varepsilon}$$

がでてくる. かくして, 点列 $E_1 f, E_2 f, \cdots\cdots$ は Cauchy の収斂条件をみたし, したがってある極限 f^* をもつ (II. 1 の **D.!**). それゆえ $Ef = f^*$ によって, いたるところで意味をもつ作用素が定義される.

$$(E_n f, g) = (f, E_n g)$$

から極限移行によって

$$(Ef, g) = (f, Eg),$$

また,

$$(E_n f, E_n g) = (E_n f, g)$$

から

$$(Ef, Eg) = (Ef, g)$$

がえられる. したがって,

$$(E^2 f, g) = (Ef, g), \quad E^2 = E.$$

ゆえに E は射影作用素である. $l \geqq m$ に対して

$$\|E_m f\| \geqq \|E_l f\|$$

であるから, $l \to \infty$ によって

$$\|E_m f\| \geqq \|Ef\|.$$

したがって $E_m \geqq E$ (定理 *15*). ——

$E_1, E_2, \cdots\cdots$ は, その任意の 2 つが, たがいに直交するような射影作用素であれば,

$$E_1, \ E_1 + E_2, \ \ E_1 + E_2 + E_3, \cdots\cdots$$

もまた射影作用素であって (定理 *16*), あきらかに上昇列をなす. したがって, 定理 *17* によりそれは 1 つの射影作用素に収斂する. この射影作用素は, それらすべてより大または等しく, $E_1 + E_2 + \cdots\cdots$ という記号で表わすことができる.

$$E_1 = P_{\mathfrak{M}_1}, \quad E_2 = P_{\mathfrak{M}_2}, \cdots\cdots$$

とする. すべて $E_m \leqq E$ であるから, $\mathfrak{M}_m$ は $\mathfrak{M}$ の部分集合であり, したがっ

て $\mathfrak{M}$ はまた

$$[\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots] = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots\cdots = \mathfrak{M}'$$

を含む．逆にすべての $\mathfrak{M}_m$ は $\mathfrak{M}'$ の部分集合であるから，

$$E_{\mathfrak{M}} \leqq P_{\mathfrak{M}'} = E'.$$

ゆえに，連続性を根拠として（うえの証明における考察を参照）

$$E \leqq E'.$$

したがって $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{M}'$ の部分集合である．以上からして

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}',\quad E = E'$$

すなわち

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots\cdots;$$

あるいは書き方を変えて

$$P_{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots\cdots} = P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \cdots\cdots$$

これで射影作用素についての考察を終える．

5. ヒルベルト空間の作用素

われわれは，無限次元の（ヒルベルト）空間 $\mathfrak{R}_\infty$ の幾何学的な諸関係を十分に研究したから，いまやその空間の線型作用素，――すなわち，$\mathfrak{R}_\infty$ のそれ自身への線型写像――に注目することができる．そのためにいくつかの概念を導入しなければならない．いうまでもなく，それらの概念のうちあるものは，すでにまえの節で導入された．

われわれは，すでにまえの節で作用素を取り扱わなければならなかったのであるが，それはつぎのように（前節定理 *11* のまえに述べたことと一致して）定義される：

<u>定 義 *6*</u>　作用素 R は，$\mathfrak{R}$ の部分集合のなかで定義され，$\mathfrak{R}$ のなかにその値をもつような函数である．すたわち，$\mathfrak{R}$ のある要素 f を $\mathfrak{R}$ のある要素 Rf に対応させるような1つの対応である．

（われわれはここで $\mathfrak{R}_\infty$ 以外に $\mathfrak{R}_n$ も含めている．$\mathfrak{R}_\infty$ が F_Ω であるときには，作用素 R は F_Ω の要素，すなわち通常の状態空間の函数に対して定義され，その値も F_Ω の要素であることに注意しよう．したがってそのときには作用素は，いわゆる“函数の函数”あるいは“汎函数”である．I.2., 4 の例を参照.）Rf が意味をもつような f の類，すなわち R の定義域は，$\mathfrak{R}$ 全体を含まなくてもよいが，もし含む場合には，R はいたるところで意味をもつと

いわれる．さらに，Rf の類，すなわちRの値域（R の定義域のRによる像）がその定義域に含まれる必要はまったくない．すなわち，Rf が意味をもつからといって，$R(Rf)=R^2f$ が意味をもつとはかぎらない[58]．

$R\pm S,\ aR,\ RS,\ R^m$（R, S は作用素，a は複素数，$m=0, 1, 2, \cdots\cdots$）が何を意味するかについてはすでに前節で述べた：

$$(R\pm S)f=Rf\pm Sf,\ (aR)f=a\cdot Rf,\ (RS)f=R(Sf),$$
$$R^0=1,\ R^1=R,\ R^2=RR,\ R^3=RRR, \cdots\cdots$$

いうまでもなく定義域を限定するさいに，左辺（すなわち，作用素 $R\pm S$, aR, RS）は，右辺が意味をもつときにだけ，意味をもつことに注意しなければならない．したがってたとえば $R\pm S$ はR とSの定義域の共通部分においてのみ意味をもつ．等々．

もし Rf がおよそそれがとるあらゆる値の各々を，ただ一度しかとらないならば，それは逆 R^{-1} をもつ：$R^{-1}f$ は，$Rg=f$ が1つの解 g を有するとき意味をもち，しかもそのとき $R^{-1}f$ はこの g である．$R\pm S,\ aR,\ RS$ に対して成り立つ算法についてはすでに前節で述べたから，ここではただ定義域についてつぎの注意をしておこう：そこで等しいとおかれた作用素はまた同一の定義域をもつが，$0\cdot R=0$ のような作用素の等式は，定義域に対しては成り立たない：$0f$ はつねに意味をもつが，それに反して $(0\cdot R)f$ は定義によって，Rf が意味をもつときにのみ意味をもつ（しかし，両者とも意味をもつときには両者とも $=0$）．それに反して，$1\cdot R=R\cdot 1=R$，そしてまた $R^m\cdot R^l=R^{m+l}$ は定義域に関しても成り立つ．

もし R, S が逆をもつならば，RS もまた逆をもつ．しかもたやすくわかるように $(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$ である．さらに $a\neq 0$ に対して $(aR)^{-1}=\frac{1}{a}R^{-1}$，もし R^{-1} が存在するならば，Rのどんな負の巾を作ることもできる：

$$R^{-2}=R^{-1}R^{-1},\ \ R^{-3}=R^{-1}R^{-1}R^{-1}, \cdots\cdots$$

58）たとえば，$\mathfrak{R}_\infty$ が F_Ω であるとしよう．Ω はすべての実の x, $-\infty<x<\infty$ の空間，$\frac{d}{dx}$ は１つの函数の函数，すなわち，作用素であるが，われわれのいう意味では，第１に微分可能であり，第２に有限な $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d}{dx}f(x)\right|^2dx$ をもつような $f(x)$ に対してのみ定義される（II. 8. 参照．そこでさらに詳細に述べる）．もちろんそのときに $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ は一般に存在するとは限らないし，また $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|^2dx$ は必ずしも有限ではない．

これで一般的な議論は終りにして，のちにわれわれにとってとくに重要となるような，特定の作用素の類を詳しく研究することに進もう．

定　義　7　　作用素 A は，その定義域が線型多様体，すなわち定義域が $f_1, \cdots\cdots, f_k$ と同時に $a_1 f_1 + \cdots\cdots + a_k f_k$ をも含み，しかも

$$A(a_1 f_1 + \cdots\cdots + a_k f_k) = a_1 A f_1 + \cdots\cdots + a_k A f_k$$

であるときに，線型とよばれる．われわれは以下では線型作用素で，しかもその定義域が，いたるところ密であるようなものだけを考察する．

量子力学では，作用素がいたるところで意味をもつという性質は断念せざるをえないが，うえの最後の条件は多くの目的にとって十分この性質の代りをつとめてくれる．この事情は重要であるから，もう少しくわしく調べてみよう．たとえば，Schrödinger の波動力学における状態空間を考察しよう．かんたんのため，それは1次元であるとする：$-\infty < q < +\infty$．波動函数は，有限な $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(q)|^2 dq$ をもった $\varphi(q)$ であり，これらはヒルベルト空間を作る（II.3参照）．さらに作用素，$q \cdots\cdots$ および $\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}\cdots\cdots$ を考察しよう．それらはあきらかに線型作用素であるが，その定義域はけっして全ヒルベルト空間ではない．q の場合はたとえ $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(q)|^2 dq$ が有限であるとしても，もちろん

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |q\varphi(q)|^2 dq = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 |\varphi(q)|^2 dq$$

が無限になることもあり，したがって $q\varphi(q)$ がもはやヒルベルト空間のなかにないこともあるからである．$\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}$ の場合は，微分可能でない函数が存在するし，また $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(q)|^2 dq$ が有限でも

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2 dq = \frac{h^2}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2 dq$$

は有限でないような函数（たとえば $|q|^{\frac{1}{2}} e^{-q^2}$，あるいは $e^{-q^2}\sin(e^{q^2})$）があるからである．しかしながら定義域はいたるところ密である：なぜなら，有限な区間 $-C \leqq q \leqq C$ においてのみ $\neq 0$ であり，いたるところなめらかなすべての $\varphi(q)$ に対して，たしかにこの2つの作用素は適用しうる．そしてこのような函数集合は，いたるところ密であるからである[59]．

59）II. 3の（条件 **E** を論議したところの）詳論によると，つぎのような函数のあらゆる1次結合を任意に正確に近似することができればよい：有限個の区間から成り立つ集合のなかでは $f(x)=1$，その他のところで $=0$．目的を達するには，このような函数の1つ1つをすべて近似することができればよい．そしてこれは，その値が1である

さらに定義を続ける.

定 義 8　2つの作用素 A, A^* は，同じ定義域をもち，かつそのなかでつねに

$$(Af, g) = (f, A^*g), \quad (A^*f, g) = (f, Ag)$$

が成り立つとき，共役とよばれる.

(f と g を交換し，両辺の複素共役をとることによって，この2つの関係の一方は他方から導かれる．さらに，A, A^* の関係は対称であること，すなわち A^*, A もまた共役であることは明らかである．したがって $A^{**}=A$ である).

なおつぎのことに注意しよう：Aに対してただ1つの共役な A^* がある．すなわち，もし A が A_1^* および A_2^* に共役であれば，$A_1^*=A_2^*$ でなければならない．実際，Ag が意味をもつようなすべての g に対して

$$(A_1^*f, g) = (f, Ag) = (A_2^*f, g)$$

であり，この g はいたるところ密であるから，

$$A_1^*f = A_2^*f$$

である．これは一般に成り立つから，$A_1^*=A_2^*$ である．このようにして，A は一意的に A^* を決定し，また同様に A^* は A を決定する.

0, 1, および一般にすべての射影作用素Eが，自分自身に共役であること（定理 12 参照），すなわち，$0^*, 1^*, E^*$ が存在して各々 $=0, 1, E$, であることは難なく示される．さらに $(aA)^* = \bar{a}A^*$ であり，また，$A \pm B$ を作ることができるかぎり（すなわち，その定義域がいたるところ密である)，$(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$ である．最後に，定義域にかんして，たやすく見出される制限附きで，次の関係が成り立つ：

$$(AB)^* = B^*A^*$$

(すなわち $(ABf, g) = (Bf, A^*g) = (f, B^*A^*g)$，ならびに

区間がただ1つであるような函数についていえればよい（他の函数はこのようなものの和である)．その区間をたとえば $a<x<b$ とする.

$$f(x)=0 \qquad x<a-\varepsilon \text{ あるいは } x>b+\varepsilon$$

$$f(x)=\cos^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a-x}{\varepsilon}, \quad a-\varepsilon \leqq x \leqq a$$

$$f(x)=\cos^2\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x-b}{\varepsilon}, \quad b \leqq x \leqq b+\varepsilon$$

$$f(x)=1 \qquad a<x<b$$

という函数は，実際にわれわれの正則性の要求をみたし，しかも十分小さい $\varepsilon(>0)$ に対して任意に正確な近似を与える.

$$(A^{-1})^* = A^{*-1}.$$

(これは，$(A^{-1}f, g) = (A^{-1}f, A^*A^{*-1}g) = (AA^{-1}f, A^{*-1}g) = (f, A^{*-1}g)$ である.)

とりわけ有限な

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)|^2 dq_1\cdots\cdots dq_k$$

をもつ $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ から成り立つヒルベルト空間を扱う，Schrödinger の波動力学の場合には（まえにそれを考察したことがあるが，こんどは k 次元の状態空間を仮定する），作用素 $q_l\cdots\cdots$ および $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}\cdots\cdots$ に対して

$$(q_l)^* = q_l, \qquad \left(\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}\right)^* = \frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}$$

が成り立つ．前者は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty} q_l\cdot\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\cdot\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\cdot dq_1\cdots\cdots dq_k$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\cdot\overline{q_l\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\cdot dq_1\cdots\cdots dq_k$$

によって明らかであり，後者はつぎのことを意味する．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{\infty}^{\infty}\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\cdot\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\cdot dq_1\cdots\cdots dq_k$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\cdot dq_1\cdots\cdots dq_k,$$

すなわち

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial q_l}\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\cdot\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)} + \varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\right.$$
$$\left.\cdot\frac{\partial}{\partial q_l}\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\right\}dq_1\cdots\cdots dq_k = 0,$$

$$\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to+\infty}}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1\cdots\cdots q_k)}\right]_{q_l=-B}^{q_l=+A}$$
$$\cdot dq_1\cdots\cdots dq_{l-1}dq_{l+1}\cdots\cdots dq_k = 0.$$

あらゆる積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots dq_1\cdots\cdots dq_k$$

の収斂は保証されているから（なぜなら φ, ψ, $\frac{\partial}{\partial x_l}\varphi$, $\frac{\partial}{\partial x_l}\psi$ はヒルベルト

空間に属する)，この極限は存在するはずであり，ただそれが消えることだけが問題である．かりにそれが $\neq 0$ であれば，$q_\iota \to +\infty$ あるいは $q_\iota \to -\infty$ に対する（確かに存在する）極限

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q_1 \cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1 \cdots\cdots q_k)}dq_1 \cdots\cdots dq_{\iota-1}dq_{\iota+1} \cdots\cdots dq_k$$

は $\neq 0$ であるが，それは積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q_1 \cdots\cdots q_k)\overline{\psi(q_1 \cdots\cdots q_k)}dq_1 \cdots\cdots dq_{\iota-1}dq_\iota dq_{\iota+1} \cdots\cdots dq_k$$

の絶対収斂（φ, ψ はヒルベルト空間に属する！）と両立しない．

A が積分作用素

$$A\varphi(q_1 \cdots\cdots q_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int_{-\infty}^{\infty} K(q_1 \cdots\cdots q_k\,;\, q_1' \cdots\cdots q_k')\varphi(q_1' \cdots\cdots q_k')dq_1' \cdots\cdots dq_k'$$

であるときには，A^* もまた積分作用素であり，ただその積分核が $K(q_1 \cdots\cdots q_k\,;\, q_1' \cdots\cdots q_k')$ ではなく，

$$\overline{K(q_1' \cdots\cdots q_k',\, q_1 \cdots\cdots q_k)}$$

であることが容易にわかる．

こんどは行列理論における事情を考察する．この場合にはヒルベルト空間は，有限な $\sum_{\mu=1}^{\infty} |x_\mu|^2$ をもつすべての数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ から成り立っている．線型作用素 A は $\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ を $\{y_1, y_2, \cdots\cdots\}$ に移す：

$$A\{x_1, x_2, \cdots\cdots\} = \{y_1, y_2, \cdots\cdots\}.$$

そのさい A の線型性のために，$y_1, y_2, \cdots\cdots$ は $x_1, x_2 \cdots\cdots$ に線型に依存するはずである：

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\nu \text{[60]}.$$

したがって A は行列 $a_{\mu\nu}$ をあたえることによって特徴づけられる．A^* には行列 $\overline{a_{\nu\mu}}$（複素共役・転置行列！）が属することはただちにわかる[60]．

60) この考察はげんみつではない．というのは，それは線型性を無限個の和に応用しているからだ，等々．しかし，それは以下のようにして完全にすることができる：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を規格化された完全直交系とし，A, A^* を共役な作用素としよう．

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu, \quad Af = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \varphi_\nu$$

とする．そうするとつぎの関係式が成り立つ：

$$y_\mu = (Af, \varphi_\mu) = (f, A^*\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu)\overline{(A^*\varphi_\mu, \varphi_\nu)}$$

たったいま述べた行列理論の諸関係との類似は，われわれがこれからおこなうような具合にエルミート作用素の概念を定義することを示唆する．それと同時にわれわれはなお2つの，のちの目的にとって重要な概念構成を導入する．

定　義　9　　作用素 A は，

$$A^* = A$$

であるときエルミートとよばれる．また，このときにつねに

$$(Af, f) \geqq 0$$

であれば[61]それは定符号であるといわれる．作用素 U は

$$UU^* = U^*U = 1$$

であるとき，ユニタリーとよばれる[62]．

したがってユニタリー作用素に対して $U^* = U^{-1}$ がえられる．定義によって

$$(Uf, Ug) = (U^*Uf, g) = (f, g)$$

であるから，とりわけ（$f = g$ に対して）

$$\|Uf\| = \|f\|$$

である．U がいたるところで意味をもち，しかもあらゆる値をとる場合には，この最後の性質から逆にユニタリー性が導かれる（注 62）参照）．これはつぎのように証明される：まず

[定理 7. γ）によって]

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \overline{(\varphi_\mu, A\varphi_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (A\varphi_\nu, \varphi_\mu) x_\nu,$$

それゆえ，$a_{\mu\nu} = (A\varphi_\nu, \varphi_\mu)$ とおくと，本文の $y_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} x_\nu$ という式がえられるし，また絶対収斂もたしかめられたことになる．

数列 $x_1, x_2, \cdots\cdots$ のヒルベルトの空間においては，容易にわかるように，数列 $\varphi_1 = 1, 0, 0, \cdots\cdots$；$\varphi_2 = 0, 1, 0, \cdots\cdots$；…… が，1 つの規格化された完全直交系を作る．$f = \{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ に対しては $f = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu \varphi_\nu$，$Af = \{y_1, y_2, \cdots\cdots\}$ に対して，$Af = \sum_{\nu=1}^{\infty} y_\nu \varphi_\nu$ であり，それによって本文との連関はあますところなくつけられた．

A^* に対する $a^*_{\mu\nu}$ を作れば，

$$a^*_{\mu\nu} = (A^*\varphi_\nu, \varphi_\mu) = (\varphi_\nu, A\varphi_\mu) = \overline{(A\varphi_\mu, \varphi_\nu)} = \overline{a_{\nu\mu}}$$

であることがわかる．

61）(Af, f) はいかなる場合にも実である．なぜなら，それは $(A^*f, f) = (f, Af) = \overline{(Af, f)}$ に等しい．

62）そのためには，U, U^* はいたるところで意味をもたなければならない．さらにそれらはおたがいに逆になっている．したがって両者ともすべての値をとり，しかも各各の値をただ1度ずつとる．

$$\|Uf\|=\|f\|,\ \text{すなわち}\quad (Uf, Uf)=(f, f)$$
$$(U^*Uf, f)=(f, f)$$

が成り立つ．f を $\frac{f+g}{2}$ および $\frac{f-g}{2}$ でおきかえて引き算をすると，容易に計算できるように

$$\mathrm{Re}(Uf, Ug)=\mathrm{Re}(f, g)$$

がえられる．ここで f を if でおきかえると，Re のかわりに Im をうる．それゆえ一般に

$$(Uf, Ug)=(f, g),\ \text{すなわち}\quad (U^*Uf, g)=(f, g)$$

が成り立つ．f を固定したとき，これはすべての g に対して成り立つから，$U^*Uf=f$ であり，これはすべての f に対して成り立つから，$U^*U=1$ である．まだ $UU^*=1$ を示すことが残っている．各 f に対して $Ug=f$ であるような1つの g があるから，

$$UU^*f=UU^*\cdot Ug=U\cdot U^*Ug=Ug=f,$$

したがって $UU^*=1$ である．

線型性のために

$$\|Uf-Ug\|=\|U(f-g)\|=\|f-g\|$$

であるから，すべてのユニタリーな U は連続である．エルミート作用素の場合にはけっしてそうではない．たとえばほかならなぬ量子力学にとって大切な作用素 $q\cdots\cdots$ および $\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{d}{dq}\cdots\cdots$ が不連続である[63]．

A^* に対するわれわれの形式的な算法から，ただちにつぎの諸関係が導かれる：U, V がユニタリーであれば，U^{-1}, UV——したがってまたすべての U の巾もそうである：A, B がエルミートであれば，$A\pm B$ もまたそうであるが，それに反して，aA は実数の a に対してのみそうであり（$A=0$ をのぞいて），また AB は A, B が交換可能であるとき，すなわち $AB=BA$ であるときにのみエルミートである．われわれはまたすべての射影作用素（とくに 0, 1）がエルミートであること，さらに Schrödinger 理論の作用素 $q_i\cdots\cdots$,

---

63）あたえられた $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(q)|^2dq$ において，$\int_{-\infty}^{+\infty}q^2|\varphi(q)|^2dq$ も $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d}{dq}\varphi(q)\right|^2dq$ も任意に大きくすることができる．たとえば $\varphi(q)=ac^{-bq^2}$．3つの積分はすべて3つとも有限（$b>0$!）であるが，それぞれ $a^2b^{-\frac{1}{2}}$, $a^2b^{-\frac{3}{2}}$, $a^2b^{\frac{1}{2}}$ に比例するから，そのうちの2つは任意に定めることができる．

$\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_\iota}\cdots\cdots$ もエルミートであることを知っている．A とともにまたすべての巾も（もしそれが存在すれば，A^{-1} も）エルミートであり，実数係数の多項式もすべてそうである．なお注目に値することは，エルミートなAおよび任意の X に対して，XAX^* もまたエルミートであることである：

$$(XAX^*)^*=X^{**}A^*X^*=XAX^*.$$

したがって，たとえばすべての XX^* ($A=1$) および X^*X (X の代りに X^*) がそうである．ユニタリーな U に対して UAU^{-1} はエルミートである ($U^{-1}=U^*$ であるから).

数の函数における連続性の重要性については解析学でよく知られているが，作用素の場合にも連続ということは基本的な重要性をもつ性質である．それゆえわれわれは，線型作用素がその性質をもつかどうかを特徴づけるいくつかの条件を与えようと思う．

<u>定　理 *18*</u>　線型作用素 R は，$f=0$ という点で連続であれば，いたるところで連続である．この条件が成り立つためには一般に

$$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$$

が成り立つような常数Cの存在が必要かつ十分である．また一方この条件は

$$|(Rf,g)|\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|g\|$$

が一般に成り立つことと同等である．エルミートな R においては，これは $f=g$ に対してだけ要求されればよい：$|(Rf,f)|\leqq C\cdot\|f\|^2$，あるいは (Rf,f) が実であるから（注 61））：

$$-C\cdot\|f\|^2\leqq(Rf,f)\leqq C\cdot\|f\|^2.$$

<u>注　意</u>：作用素の場合の連続性の概念は Hilbert に始まる[64]．かれはそれを“有界性”として表わし，われわれの最後から2番目の規準によって定義した．最後の規準における2つの $\leqq$ のうち1つだけが一般に成り立つときには，R はそれぞれ下方にあるいは上方に半有界であるという．たとえばすべて定符号のRは ($C=0$ でもって) 下方に半有界である．

<u>証　明</u>：$f=0$ における連続性はつぎのことを意味する：任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して $\|f\|<\delta$ から $\|Rf\|<\varepsilon$ が導かれる．そのときには $\|f-f_0\|<\delta$ から

$$\|R(f-f_0)\|=\|Rf-Rf_0\|<\varepsilon,$$

---

64) Gött. Nachr. 1906.

が導かれる．すなわちRはまた $f=f_0$ に対しても連続であり，すなわち，いたるところで連続である．

$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$（もちろん $C>0$）が成り立てば，連続性をうる：それには，$\delta=\dfrac{\varepsilon}{C}$ とおけばよい．逆に，もし連続性があれば，$\varepsilon=1$ に対するδを定め $C=\dfrac{2}{\delta}$ とおくことができる．なぜならば

$$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$$

は $f=0$ に対してもともと成り立っている：$f\neq 0$ に対しては $\|f\|>0$ であるが，$g=\dfrac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|}f$ とするとつぎの式が成り立つ：$\|g\|=\frac{1}{2}\delta$ であるから

$$\|Rg\|=\frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|}\cdot\|Rf\|<1,\quad \|Rf\|<\frac{\|f\|}{\frac{1}{2}\delta}=C\cdot\|f\|.$$

$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$ から

$$|(Rf,g)|\leqq\|Rf\|\cdot\|g\|\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|g\|$$

が導かれる．逆に $|(Rf,g)|\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|g\|$ から，$g=Rf$ とおくと，

$$\|Rf\|^2\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|Rf\|.$$

したがって

$$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$$

が導かれる．残るのはエルミートなRに対して

$$|(Rf,f)|\leqq C\cdot\|f\|^2$$

から

$$|(Rf\cdot g)|\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|g\|$$

が帰結されることを示すことである．f に $\dfrac{f+g}{2}$ および $\dfrac{f-g}{2}$ を代入すると，

$$|\mathrm{Re}(Rf,g)|=\left|\left(R\frac{f+g}{2},\ \frac{f+g}{2}\right)-\left(R\frac{f-g}{2},\ \frac{f-g}{2}\right)\right|$$

$$\leqq C\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2+\left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2\right)=C\frac{\|f\|^2+\|g\|^2}{2}$$

が求められる[65]．ここで，f, g を定理 *1* の証明のときのように，

---

65) つぎの計算はRのエルミート性に依っている（第3の段階）．

$$\left(R\frac{f+g}{2},\ \frac{f+g}{2}\right)-\left(R\frac{f-g}{2},\ \frac{f-g}{2}\right)=\frac{(Rf,\ g)+(Rg,\ f)}{2}$$

$$=\frac{(Rf,\ g)+\overline{(f,\ Rg)}}{2}=\frac{(Rf,\ g)+\overline{(Rf,\ g)}}{2}=\mathrm{Re}(Rf,\ g)$$

af, $\frac{1}{a}g$ $(a>0)$ でおきかえる．右辺を最小にして $|\mathrm{Re}(Rf,g)|\leqq C\cdot\|f\|\cdot\|g\|$ がえられる：つぎに，f を $e^{i\alpha}f$ でおきかえて左辺の最大から，

$$|(Rf,g)|\leqq C\|f\|\cdot\|g\|$$

がえられる．いうまでもなく，これは，Rg が意味をもつときに成り立つが，この g はいたるところ密に存在するし，また Rg は最後の結果には，もはやまったく出てこないから，連続性に基いてこれは一般に成り立つ．

定符号の作用素について，いま１つの定理を証明する：

<u>定　理 *19*</u>　　R がエルミートで定符号であれば，つねに

$$|(Rf,g)|\leqq\sqrt{(Rf,f)\cdot(Rg,g)}$$

である．だから $(Rf,f)=0$ から $Rf=0$ が導かれる．

<u>証　明</u>：うえの不等式は Schwarz の不等式 $|(f,g)|\leqq\sqrt{(f,f)\cdot(g,g)}$ （すなわち $\leqq\|f\|\cdot\|g\|$）が定理 *1* で $(f,f)\geqq 0$ から証明されたのとまったく同様に $(Rf,f)\geqq 0$ が成り立っていること（定符号性！）から導かれる．いま $(Rf,f)=0$ とすると，Rg が意味をもつ場合にはこの不等式からまた $(Rf,g)=0$ が導かれる．これはいたるところ密な g-集合に対して成り立ち，したがって連続性の根拠からすべての g に対して成り立つ．したがって $Rf=0$ である．

最後にわれわれは，２つの作用素 R, S の交換可能性という重要な概念，すなわち $RS=SR$ という関係にふれておきたいと思う．

$RS=SR$ から

$$S\cdots\cdots SSR=S\cdots\cdots SRS=S\cdots\cdots RSS=\cdots\cdots=RS\cdots\cdots SS,$$

が導かれる．すなわち R と S^n は交換可能である $(n=1,2\cdots\cdots)$．$R1=1R=R$ であり，また $S^0=1$ であるから，これは $n=0$ に対しても成り立つ．S^{-1} が存在する場合には，

$$S^{-1}\cdot SR\cdot S^{-1}=S^{-1}RS\cdot S^{-1}.$$

したがって

$$S^{-1}\cdot SR\cdot S^{-1}=S^{-1}S\cdot RS^{-1}=RS^{-1},\quad S^{-1}\cdot RS\cdot S^{-1}=S^{-1}R\cdot SS^{-1}=S^{-1}R$$

によってまた $RS^{-1}=S^{-1}R$ である．かようにして $n=-1$ も，それゆえ，$n=-2$, -3, …… もすべて許される．すなわち R は S のすべての巾と交換可能である．もう一度くりかえして適用すると，R のすべての巾が S のすべての巾と交換可能であることが示される．R が S, T と交換可能であれば，明らかにまたすべ

ての aS, および $S\pm T$, ST と交換可能である．うえの結果と一緒にしてこれから，R, S が交換可能であれば，R のすべての多項式はまたSのすべての多項式と交換可能であることが示される．とりわけ $R=S$ の場合からRのすべての多項式はおたがいに交換可能であることがわかる．

6. 固 有 値 問 題

さてこれでわれわれは，I.3 の $\boldsymbol{E}_1$，あるいは $\boldsymbol{E}_2$ という方程式を解く問題を，抽象ヒルベルト空間において研究することができるところまできた．その問題は抽象ヒルベルト空間の特殊な実現である F_Z および F_Ω において量子力学の主要問題なのであった．

それは固有値問題とよばれるが，われわれはこれを，新たに完結した形に定式化しなければならない．

I.3 で要求された $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, は，

E. $$\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$$

の $\varphi\neq 0$ であるような，すべての解を見出すことに同等である．ここに，H はハミルトン函数（その場所をみよ）に対応するエルミート作用素，φはヒルベルト空間の要素，λは実数である（H が与えられて φ, λ を求める）．ただしそのさい，見出されるべき解の数について二，三の要求がおかれた．すなわち，

1. 行列理論においては，これらの解

$$\varphi_1=\{s_{11}, s_{12}, \cdots\cdots\},\quad \varphi_2=\{s_{21}, s_{22}, \cdots\cdots\}, \cdots\cdots$$

から（あつかっているのは F_Z!），逆 S^{-1} を有する行列

$$S=\{s_{\mu\nu}\}$$

を作りあげることができ（I.3 参照）：

2. 波動理論においては，あらゆる波動函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_f)$（解である必要はない）が，解

$$\varphi_1=\varphi_1(q_1\cdots\cdots q_f),\quad \varphi_2=\varphi_2(q_1\cdots\cdots q_f), \cdots\cdots$$

の級数に展開することができる（$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は異なるλに属する）：

$$\varphi(q_1\cdots\cdots q_f)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(q_1\cdots\cdots q_f).$$

この 2 つがみたされるだけの数の解が要求されるのである（このあとの事情については I.3 では全然ふれなかったけれども，この要求は波動理論のいっそ

う進んだ構成，なかでも Schrödinger の“摂動論”[66] のためには欠くことができないのである).

ところで *1.* は *2.* と同一のことに帰する．そのわけは：行列 S は

$$\{1, 0, 0, \cdots\cdots\},\ \{0, 1, 0, 0, \cdots\cdots\}$$

をそれぞれ

$$\{s_{11}, s_{12}, s_{13}, \cdots\cdots\},\ \{s_{21}, s_{22}, s_{23}, \cdots\cdots\}$$

に移す．すなわち，ヒルベルト空間 $\mathfrak{R}_\infty$ 全体を，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ によって張られる閉じた線型多様体へ移す——同時に，S^{-1} が存在するから後者もまた $\mathfrak{R}_\infty$ に等しい．しかるに *2.* も同じことを意味する：それはまさしく，あらゆる φ が $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の1次結合でいくらでも良く近似されうることを要求している[67]．われわれはこれらの条件の影響の及ぶ範囲を正確に定め，いまや自由に使うことのできる形式上の道具によって，もう一度方程式 ***E.*** の性質をしらべることにする．まず第1に，$\varphi \neq 0$ が要求されており，φ とともに $a\varphi$ もまた解であるから，$\|\varphi\|=1$ となるような解を考察すれば十分である．第2に，λ が実であることは要求しなくてよい．それは

$$\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$$

からでてくるのである：

$$(\mathrm{H}\varphi, \varphi)=(\lambda\varphi, \varphi)=\lambda(\varphi, \varphi)=\lambda$$

(II.5 の注 61) をみよ)．第3に，異なる λ_1, λ_2 に属する解 φ_1, φ_2 はたがいに直交する：

$$(\mathrm{H}\varphi_1, \varphi_2)=\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2),\ (\mathrm{H}\varphi_1, \varphi_2)=(\varphi_1, \mathrm{H}\varphi_2)=\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2);$$

したがって

$$\lambda_1(\varphi_1, \varphi_2)=\lambda_2(\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{および} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

これから $(\varphi_1, \varphi_2)=0$ となる．

いま $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ はすべてたがいに異なった，***E.*** の解を許すような λ の値とする（$\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$ が解けるようなすべての λ に対して，ノルムが1の解 φ_λ を選べば，φ_λ はさきほど述べたことによって規格化直交系をつくる．II.2 の定理 *3*[(∞)] にしたがって，その系は有限もしくは無限点列である．したがって λ

66) 注 9) にあげた書物のなかの5番目の論文 (Ann. Phys. 〔4〕 Bd. 80 (1926)) を参照．

67) こまかい収斂の問題にはあえてたち入らないが，これは行列および波動理論のはじめの形においても正確に把握されていなかった．この問題はのちに残るところなく解決されるであろう (例えば II. 9. をみよ).

もまた，ときには途中で切れることもある数列として書くことができる).
$\lambda=\lambda_\rho$ のおのおのに対して，$\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$ の解のすべては1つの線型多様体をつくり，しかもそれは閉じている[68]．したがって定理 *9* によってこの閉じた線型多様体をちょうど張るような解からなる規格化直交系 $\varphi_{\rho,1}\cdots\cdots\varphi_{\rho,\nu_\rho}$ が存在する．数 ν_ρ は明らかに $\lambda=\lambda_\rho$ に対する1次独立な解の最大数であり，そのため固有値 λ_ρ の多重度とよぶこともできる（$\nu=1,2,\cdots\cdots\infty$；$\nu=\infty$ もありうる．例えば $\mathrm{H}=1$，$\lambda=1$ に対して)．まえに述べたことによって，ρ の異なる $\varphi_{\rho,1}\cdots\cdots\varphi_{\rho,\nu_\rho}$ はたがいに直交するから，

$$\varphi_{\rho,\nu}\ (\rho=1,2,\cdots\cdots,\ \nu=1,\cdots\cdots,\nu_\rho)$$

全体がまた規格化直交系である．その成り立ちからして，それは **E.** の解 φ の全体と同じ閉じた線型多様体を張ることがわかる．

$\varphi_{\rho,\nu}$ に適当に通し番号をつけて，$\psi_1,\psi_2\cdots\cdots$ とする．それぞれに対応する λ_ρ を $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots\cdots$ とする．そうすると，まえに定式化した，**E.** の解のすべては閉じた線型多様体として $\Re_\infty$ を張らなければならないという条件は，ψ_1, $\psi_2,\cdots\cdots$（解の一部!）がすでにそうなっていなければならず，したがって定理 *7* α) によってこの規格化直交系は完全であることを意味している．

したがって，量子力学の意味における固有値問題は，規格化された完全直交系を形づくりうるだけの数の **E.** の解

$$\varphi=\psi_1,\psi_2,\cdots\cdots\quad \text{および}\quad \lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots\cdots$$

を見出すことを要求することになろう．しかし，これは一般にはけっして可能でない．例えば波動力学で **E.**（すなわち，I.3 の $\boldsymbol{E}_2$.）の解の一部——それらはすべて波動函数を解で展開するためには使わなければならない（うえをみよ)——はその絶対値の2乗の積分が有限でなく[69]，したがってヒルベルト空間に属さない．それゆえヒルベルト空間（われわれは **E.** においてそれのみを

---

68) あとのことが直ちに明らかなのは，いたるところ意味をもつ連続な，すなわち $f_n\to f$ から $\mathrm{H}f_n\to\mathrm{H}f$ がでてくるような H に対してだけである．この条件としては容易にわかるように，つぎのいくらか広い性質でも十分である：$f_n\to f$，$\mathrm{H}f_n\to f^*$ から $\mathrm{H}f=f^*$（これはいわゆる H が“閉じていること”である．著者の論文 Math. Ann. Bd. **102** (1929) をみよ)．この条件は量子力学の作用素のときには，それが不連続のさいにも，つねにみたされている．正確にいえば閉じていないエルミート作用素は，その定義域の一意的な拡張によって（エルミートでかつ）閉じているようにすることができるのである（これは例えば連続性についてはいえない)．II. 9. 116 頁をみよ．

69) Schrödinger の水素原子に関する論文，さきの注 16) をみよ．

考えるのである!) のなかには解の規格化された完全直交系が見出されない.

他方, Hilbert の固有値問題の理論は, このような現象がけっして作用素の例外的なふるまいを表わしているのでない (連続の場合にも) ことを示している[70]. それゆえわれわれは, そのようなことが起ったときに生ずる事情と対決しなければならない (これの物理的な意味については, のちに考察するであろう. III.3 をみよ). それが起ったとき, すなわち, ***E.*** の解から作りあげられた規格化直交系が完全でないときには, "H の連続スペクトル" が存在するという ($\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ は "Hの点スペクトル" をつくる). このように, ***E.*** がうまくいかなかったのであるから, われわれのつぎの課題は, エルミート作用素の固有値問題に対する定式を見出し, ついでそれを量子力学に適用することである. まずこの固有値問題の定式を Hilbert (さきの注 70) をみよ) を参照しながら与え, それを説明しなければならない.

7. 続　　き

方程式

$$\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$$

も, その解から規格化された完全直交系をつくることができるという要求も, ともに有限な次元の $\mathfrak{R}_n$ から類推されるものである.

$\mathfrak{R}_n$ においては H は行列

$$\{h_{\mu\nu}\},\ \mu,\ \nu=1, \cdots\cdots, n,\ \ h_{\mu\nu}=\overline{h_{\nu\mu}}$$

であり, $\mathrm{H}\varphi=\lambda\varphi$, すなわち

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}x_\nu=\lambda x_\mu$$

の解 $\varphi=\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}$ が規格化された完全直交系を含むということはよく知られた代数的事実である[71].

ところがわれわれが知ったように, $\mathfrak{R}_n$ のこの性質は $n\to\infty$ によって $\mathfrak{R}_\infty$ へ移すことはできず, したがって $\mathfrak{R}_\infty$ における固有値問題は別に定式化しなければならない. $\mathfrak{R}_n$ における固有値問題を定式化しなおして, この新しい ($\mathfrak{R}_n$ においては古いものと同等の) 定式が $\mathfrak{R}_\infty$ への移行を許すような具合いにする

70) さきの注 64) をみよ.

71) 例えば Courant-Hilbert: 注 30) をみよ.

ことができることがわかる．すなわち，両方とも各 $\mathfrak{R}_n(n=1, 2, \cdots\cdots)$ においては同一のこと（つまりエルミート行列の主軸変換の可能性）を表わすが，その一方は $\mathfrak{R}_\infty$ へも移すことができるのに反して他方はそれができない．

$$\{x_{11}, \cdots\cdots, x_{1n}\}, \cdots\cdots, \{x_{n1}, \cdots\cdots, x_{nn}\}$$

を固有値方程式の解からなる規格化された完全直交系，$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ をそれぞれに属する λ とする．したがってベクトル

$$\{x_{11}, \cdots\cdots, x_{1n}\}, \cdots\cdots, \{x_{n1}, \cdots\cdots, x_{nn}\}$$

は $\mathfrak{R}_n$ におけるデカルト座標系をつくる．そのときこの座標系における座標 $\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_n$ を座標 $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$ へ変換する式は，

$$\{\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n\}=\mathfrak{x}_1\{x_{11}, \cdots\cdots, x_{1n}\}+\cdots\cdots+\mathfrak{x}_n\{x_{n1}, \cdots\cdots, x_{nn}\}$$

すなわち，

$$\xi_1=\sum_{\mu=1}^{n} x_{\mu 1}\mathfrak{x}_\mu, \cdots\cdots, \xi_n=\sum_{\mu=1}^{n} x_{\mu n}\mathfrak{x}_\mu$$

となり，その逆は

$$\mathfrak{x}_1=\sum_{\mu=1}^{n} \bar{x}_{1\mu}\xi_\mu, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_n=\sum_{\mu=1}^{n} \bar{x}_{n\mu}\xi_\mu$$

となる．

条件

$$\sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}x_{\rho\nu}=\lambda_\rho x_{\rho\mu}$$

は，変数 $\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_n$ および新しい変数列 $\eta_1, \cdots\cdots, \eta_n$（ならびに，その公式によってこれに結びつけられる $\mathfrak{y}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_n$）を使ってつぎのように書かれる：

$$\sum_{\rho,\mu=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}x_{\rho\nu}\right)\mathfrak{x}_\rho\bar{\eta}_\mu=\sum_{\rho,\mu=1}^{n}\lambda_\rho x_{\rho\mu}\mathfrak{x}_\rho\bar{\eta}_\mu,$$

すなわち，

$$(\boldsymbol{D.})\qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}\xi_\nu\bar{\eta}_\mu=\sum_{\rho=1}^{n}\lambda_\rho\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\eta_\mu\right)}.$$

ところで，われわれの座標系がデカルト的であることは

$$(\boldsymbol{O.})\qquad \sum_{\mu=1}^{n}\xi_\mu\bar{\eta}_\mu=\sum_{\rho=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\eta_\mu\right)}$$

という式によって表現される．

こうして，$\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{O}$ という性質をそなえた行列 $\{x_{\mu\nu}\}$ を見出すことは，$\mathfrak{R}_n$ に

おいて固有値問題をとくことに同等である．そしてこの形では $\mathfrak{R}_\infty$ への移行は成功しない．しかしそれは以下のような理由から意外なものではない．つまり条件 **D, O** は，未知の λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ を完全には決定しないのである．主軸変換の理論が示すように（さきにあげた注 71）をみよ），λ_ρ は順番を別とすれば一義的に決まるが，$x_{\mu\nu}$ については事態はずっと悪い．明らかに各行 $x_{\rho 1}, \cdots\cdots, x_{\rho n}$ には絶対値 1 の因数を乗ずることができる．――そのうえ，いくつかの λ_ρ が一致するときには，それらに属する行 $x_{\rho 1}, \cdots\cdots, x_{\rho n}$ のあいだでは，どんなユニタリー変換も許されるのである！　そのような一義的に確定されない量を用いて，難しい $n\to\infty$ の極限移行を試みるというのは見込みのないことである：λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ がその不完全な確定性のために，とちゅうで大きな変動を随意におこなうことができるというときに，いかにして移行の過程が収斂するといえるだろうか！

しかし，このことは事態をいかに正しく把握するかについて指示を与えてくれる．われわれは，まず条件 **D.**, **O.** および λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ を，これらにおいては失われている一義性をもつようなものでおきかえることを試みなければならない．そうすると極限移行の困難はずっと少くなることが示される．

l は λ_ρ のどれかがとる値とすると，

$$\sum_{\lambda_\rho=l}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\eta_\mu\right)}$$

は，うえにあげた（**D.**, **O.** と両立する）λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ の変動にもかかわらず不変である．l がすべての λ_ρ と異なれば，これは $=0$ ではじめから不変である．したがって，エルミート形式（ξ, η はそれぞれ $\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$ および $\eta_1, \cdots\cdots, \eta_n$ を表わす）

$$E(l\,;\,\xi,\eta)=\sum_{\lambda_\rho\leqq l}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\xi_\mu\right)\overline{\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\rho\mu}\eta_\mu\right)}$$

もまた不変である（l は任意！）．$E(l\,;\,\xi,\eta)$（すなわち，それの係数）を知れば，これから λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ について結論をくだすのはたやすいことである．したがって．固有値問題（すなわち **D.**, **O.**）を，そのなかに λ_ρ, $x_{\mu\nu}$ のかわりに $E(l\,;\,\xi,\eta)$ だけが現れるように定式化すれば，われわれは望ましい一義的な定式に達するであろう．

そこで，$E(l)$ をエルミート形式 $E(l\,;\,\xi,\eta)$ の行列とすれば[72]，行列の集

り $E(l)$ に対して **D.**, **O.** は何を意味するのか.

O. の意味は：l が十分大きければ（すなわちすべての λ_ρ より大きければ），$E(l)=1$（単位行列）である．$E(l)$ の本性からして：l が十分小さければ（すなわち，すべての λ_ρ より小さければ）$E(l)=0$ である．l が $-\infty$ から $+\infty$ まで増大するとき，$E(l)$ は有限個の点（それは $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ のうちたがいに異なるもので，$l_1<l_2<\cdots\cdots<l_m$ とよぶことができる．$m\leqq n$）を除いてはつねに一定で，それらの点では飛躍する．そしてこのとき不連続はつねに飛躍点の左側にある（なぜなら，$\sum_{\lambda_\rho\leqq l}$ は l の函数として右側に連続だから，$\sum_{\lambda_\rho<l}$ では逆になる）．最後に，つぎに示すように，$l'\leqq l''$ に対して（行列の積！）

$$E(l')E(l'')=E(l'')E(l')=E(l').$$

$E(l';\xi,\eta)$，$E(l'';\xi,\eta)$ に対して，これを $\mathfrak{x}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{x}_n$ および $\mathfrak{y}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{y}_n$ の座標系で証明するのが便利である．そのわけは，これらの変数を導入すれば，$E(l';\xi,\eta)$ および $E(l'';\xi,\eta)$ がそれぞれ

$$\sum_{\lambda_\rho\leqq l'}\mathfrak{x}_\rho\bar{\mathfrak{y}}_\rho,\quad \sum_{\lambda_\rho\leqq l''}\mathfrak{x}_\rho\bar{\mathfrak{y}}_\rho$$

となるからである．したがって行列は，対角線をはずれてはすべて 0，対角線上では，それぞれ $\lambda_\rho\leqq l'$ あるいは $\leqq l''$ のとき ρ 番目の区劃は 1，それ以外ではやはり 0 という形をとる．この行列に対しては，うえの主張は明らかに成り立つ．

さて，われわれはさらに **D.** を定式化しなおさなければならない．

D. は明らかに

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}h_{\mu\nu}\xi_\mu\bar{\eta}_\nu=\sum_{\tau=1}^{m}l_\tau\{E(l_\tau;\xi,\eta)-E(l_{\tau-1};\xi,\eta)\}$$

を意味する（l_0 は $<l_1$ の任意の数）．しかるに $E(l;\xi,\eta)$ は区間

$$-\infty<l<l_1;\ l_1\leqq l<l_2;\ \cdots\cdots;\ l_{m-1}\leqq l<l_m;\ l_m\leqq l_\nu<+\infty$$

のおのおのにおいて一定であるから，すべての数系列

$$\Lambda_0<\Lambda_1<\Lambda_2<\cdots\cdots<\Lambda_k$$

に対して，$l_1, \cdots\cdots, l_m$ が $\Lambda_1, \cdots\cdots, \Lambda_k$ のうちに含まれているかぎり，

---

72) すなわち，$E(l)=(e_{\mu\nu}(l))$，$E(l;\xi,\eta)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}e_{\mu\nu}(l)\xi_\mu\bar{\eta}_\nu$．したがって，

$$e_{\mu\nu}(l)=\sum_{\lambda_\rho\leqq l}x_{\rho\mu}\overline{x_{\rho\nu}}.$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}\xi_\mu\bar{\eta}_\nu=\sum_{\tau=1}^{k}\Lambda_\tau\{E(\Lambda_\tau;\ \xi,\ \eta)-E(\Lambda_{\tau-1};\ \xi,\ \eta)\}$$

が成り立つ．スチェルチェス（Stieltjes）積分の概念[73]を適用すれば，これはまた，

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}\xi_\mu\bar{\eta}_\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda;\ \xi,\ \eta)$$

のようにも書かれる（$\int_{-\infty}^{\infty}$ はいうまでもなく，$\int_a^b$，$a<l_1$，$b>l_m$ でおきかえられる）．あるいは，係数に注目して，すべての係数に対して成り立つ方程式を行列それ自身について書くと：

$$\mathsf{H}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda).$$

ここに $\mathsf{H}=\{h_{\mu\nu}\}$ である．

したがって，これまでのところでは問題はつぎのようになる：与えられたエルミート行列 $\mathsf{H}=\{h_{\mu\nu}\}$ に対して，以下の性質をもつエルミート行列 $E(\lambda)$ の集り（$-\infty<\lambda<+\infty$）を求めること：

S_1.　　十分$\left\{\begin{matrix}\text{小さい}\\\text{大きな}\end{matrix}\right\}$ λ に対して $E(\lambda)=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}$.

$E(\lambda)$ は（λ の函数とみなしたとき）有限個の例外点を除いてはいたるところ一定，これらの点では飛躍し，しかもこの飛躍はつねにその点の左側にある．

73）スチェルチェス積分の概念については Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig 1913 をみよ．さらに，作用素の理論からの要求をとくに考慮したもののうちでは Carleman: *Equations integrales singulieres*, Upsala 1923. これについてあまり興味をもたない読者にとっては，その定義だけで十分である：区間 a, b の分割 Λ_0, Λ_1, ……, Λ_k,

$$a\leqq\Lambda_0<\Lambda_1<\cdots\cdots<\Lambda_k\leqq b$$

の各々に対して，和

$$\sum_{\tau=1}^{k} f(\Lambda_\tau)\{g(\Lambda_\tau)-g(\Lambda_{\tau-1})\}$$

をつくる．これが，分割 Λ_0, Λ_1, ……, Λ_k をだんだん細かくしていったときに収斂すれば，積分 $\int_a^b f(x)dg(x)$ は意味をもち，かつこの極限に等しいとされる（$g(x)=x$ に対しては，これはよく知られたリーマン積分に移行する）．

したがって，われわれの場合に導かれた方程式は，$\int_{-\infty}^{+\infty} xdE(x;\ \xi,\ \eta)$ が存在し（そこでは変数を x でなく λ で表わした），それは $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}\xi_\mu\bar{\eta}_\nu$ に等しい，ということを意味している．

S_2. つねに

$$E(\lambda')E(\lambda'')=E(\mathrm{Min}(\lambda',\lambda''))^{74)}.$$

S_3. $$\mathsf{H}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda)$$

が成り立つ（スチェルチェス積分を適用して）.

ここでは，$S_1.-S_3.$ から **D.**, **O.** を解くことへ話を逆にもどすという問題は，とりあげない（たとえそれが容易であるとしても）．というのは，われわれが量子力学で必要とする固有値問題の唯一の形はいまのものだからである．われわれはむしろただちに，$S_1.-S_3.$ を有限個の変数から無限個の変数へ，すなわち $\mathfrak{R}_n$ から $\mathfrak{R}_\infty$へ一般化することに進もう．

$\mathfrak{R}_\infty$ においては，いうまでもなく H および $E(\lambda)$ はエルミート作用素とみなされる．すなわち，与えられた H に対して $S_1.-S_3$ に似せて作られた関係をたもつような $E(\lambda)$ の集りを決定しようとするのである．したがって，$\mathfrak{R}_\infty$ における $S_1.-S_3.$ の類似物を見出さなければならない．

$S_2.$ には $\mathfrak{R}_n$ の次元数がまったく現れないから，$S_2.$ はそのまま移される．しかし射影作用素についての以前の結果（II. 4）を使って，それを少し変えようと思う．まず，それは $\lambda'=\lambda''=\lambda$ に対して

$$E(\lambda)^2=E(\lambda),$$

すなわち，$E(\lambda)$ は射影作用素でなければならないことを表わしている．すると，$S_2.$ の意味は（$\lambda'\leqq\lambda''$ の場合に限ってよい．$\lambda'\geqq\lambda''$ の場合に対するものはそれから導かれる）:

$$\lambda'\leqq\lambda'' \text{ に対して } E(\lambda')\leqq E(\lambda'')$$

（定理 *14* および II. 4 のそれに続く個所をみよ）.

$S_3.$ については二，三の注意が必要である．スチェルチェス積分は数に対して定義されており，作用素に対しては定義されていないから

$$\mathsf{H}=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda)$$

は意味がない．しかし，H, $E(\lambda)$ を，作用素のあいだの望みの関係をふたたび与えてくれる数でおきかえることは容易である．すなわち，$\mathfrak{R}_\infty$ のすべての f, g に対して——Hfが意味をもつかぎり，

74) $\mathrm{Min}(a, b, \cdots\cdots, e)$ および $\mathrm{Max}(a, b, \cdots\cdots, e)$ は有限個の実数 $a, b, \cdots\cdots, e$ のうち，それぞれ最小，最大のものである．

$$(\mathsf{H}f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g)$$

を要求するのである.

$$\mathsf{H} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda)$$

は，これに対する略号として，単に記号的なものと理解しなければならない.

最後に，S_1. は次元数が無限大になることによって本質的な影響をうける. $\mathfrak{R}_n$ においては，そこを越えれば $E(\lambda)$ が 0 または 1 になる点，あるいは $E(\lambda)$ が不連続的に飛躍する点は，H の固有値であり，それが一定の区間は固有値が含まれない区間である．ところで $n\to\infty$ となれば，あらゆることが起りうる．すなわち，最小値，最大値はそれぞれ $-\infty$ または $+\infty$ へ向い，残りは，その数がますます多くなるから，ますます密集し，したがって $E(\lambda)=$ 一定の区間がときとして1点にまで縮まるということがありうる（とくにこの最後の事情は，Hilbert の理論においてある事情のもとでいわゆる連続スペクトルの出現を示す症状である[75])．それゆえ S_1. は $\mathfrak{R}_n$ から $\mathfrak{R}_\infty$ へ移行するさいに本質的に変えられなければならない．$E(\lambda)$ の変動が離散的で飛躍的であるという性格が，ときとして破れることを考慮しなければならないのである.

このような観点からすれば，$E(\lambda)$ が 0, 1 という値をとるという最後の仮定をすてて，代りに，単に $E(\lambda)$ が 0 または 1 へ収斂する（$n\to-\infty$ または $\to+\infty$ のとき）ことを要求するのは，まったく納得のゆくことである．そうして $E(\lambda)$ がある区間にわたって一定で，1点で飛躍するということに代って，連続的な増大の可能性も生ずる．これらに対して，万一の不連続点においては左側にだけ不連続があるという，それほどきびしくはない要求は試みに保持することができる．けっきょく，われわれは S_1. をつぎのように定式化する：

$\lambda\to-\infty$ に対して $E(\lambda)\to 0$,

$\lambda\to+\infty$ に対して $E(\lambda)\to 1$,

$\lambda\to\lambda_0$, $\lambda\geqq\lambda_0$ に対して $E(\lambda)\to E(\lambda_0)$[76].

S_3. についてはなお注意すべきことがある．有限次元の $\mathfrak{R}_n$ においては，F,

---

75) さきの注 64)，また注 73) であげた Carleman の著書を参照．この連続スペクトルについては多くの問題を扱わなければならない．II. 8. をみよ.

76) $A(\lambda)\to B$ は（$A(\lambda)$, B は $\mathfrak{R}_\infty$ における作用素．λ はパラメーター），$\mathfrak{R}_\infty$ に属するすべての f に対して $A(\lambda)f\to Bf$ ということであると理解する．したがって，それはヒルベルト空間における収斂の簡略化された表現である.

が行列 $E(l_\tau)-E(l_{\tau-1})$ のことであるとすれば

$$\mathrm{H}=\sum_{\tau=1}^{m} l_\tau F_\tau$$

が成り立った. S_1. によって,

$\sigma \geqq \tau$ に対して

$$F_\tau E(l_\sigma)=E(l_\tau)E(l_\sigma)-E(l_{\tau-1})E(l_\sigma)=E(l_\tau)-E(l_{\tau-1})=F_\tau,$$

$\sigma \leqq \tau-1$ に対して

$$F_\tau E(l_\sigma)=E(l_\tau)E(l_\sigma)-E(l_{\tau-1})E(l_\sigma)=E(l_\sigma)-E(l_\sigma)=0.$$

したがって, $F_\sigma=E(l_\sigma)-E(l_{\sigma-1})$ であるから

$$F_\tau F_\sigma=\begin{cases} F_\tau & \tau=\sigma \text{ に対して}, \\ 0 & \tau \neq \sigma \text{ に対して}. \end{cases}$$

ゆえに

$$\mathrm{H}^2=\left(\sum_{\tau=1}^{m} l_\tau F_\tau\right)^2=\sum_{\tau,\sigma=1}^{m} l_\tau l_\sigma F_\tau F_\sigma=\sum_{\tau=1}^{m} l_\tau^2 F_\tau$$

が成り立つ (同様に $\mathrm{H}^p=\sum_{\tau=1}^{m} l_\tau^p F_\tau$). その結果 H におけるのと同じ変形ができる:

$$\mathrm{H}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 dE(\lambda).$$

これから推しはかつて $\mathfrak{R}_\infty$ においても同様の記号的な方程式が作られ, したがって数値的には

$$(\mathrm{H}^2 f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d(E(\lambda)f, g)$$

(これは以下でも確認される). $f=g$ に対しては, これから,

$$(\mathrm{H}^2 f, f)=(\mathrm{H}f, \mathrm{H}f)=\|\mathrm{H}f\|^2,$$
$$(E(\lambda)f, f)=\|E(\lambda)f\|^2$$

によって

$$\|\mathrm{H}f\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

が導かれる. しかるにこの式は, $\mathrm{H}f$ が意味をもつときその値は何であるかということだけでなく, いつそれが意味をもつかということまで $E(\lambda)$ が確定することを期待させる. なぜなら: 積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

はけっして負にならない被積分函数 ($\lambda^2 \geqq 0$) をもち，また d 記号のうしろの表式は減少しない ($\|E(\lambda)f\|^2$, S_2. および II.4 の定理 *15* をみよ) から，この積分はその本性によって収斂，すなわち，0 または正の有限値をとるか，まっすぐに発散する，すなわち，$+\infty$ であるか，のどちらかである[77]．そしてこのことは H との関係とは独立に，すなわち，Hf が意味をもつかどうかにかかわりなく成り立つ．そのため，Hf が意味をもつ (すなわち，それが $\mathfrak{R}_\infty$ のなかに存在する) のは，ひとまず $\|\mathrm{H}f\|^2$ のものとされた値，つまり，すべての f について意味のある表現

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$$

の値が有限であるとき，そしてそのときだけであると期待してよい．

こうして $S_1.$—$S_3.$ の新しい定式は以下のようになる：与えられたエルミート作用素 H に対して，つぎの性質をもつ射影作用素 $E(\lambda)$ の集り ($-\infty<\lambda<+\infty$) を求めること：

$\bar{S}_1$. $\lambda\to-\infty$ または $\to+\infty$ に対して，それぞれ

$$E(\lambda)f\to 0 \text{ または } \to f$$

が成り立ち，$\lambda\to\lambda_0$, $\lambda\geqq\lambda_0$ に対して

$$E(\lambda)f\to E(\lambda_0)f \quad (\text{すべての } f \text{ について！}).$$

$\bar{S}_2$. $\lambda'\leqq\lambda''$ から

$$E(\lambda')\leqq E(\lambda'').$$

$\bar{S}_3$. その本性によって収斂 (0 または正で有限) するか，まっすぐ発散するかする積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

は H の定義域を定める：この積分が意味をもつとき，そしてそのときにのみ，Hf は意味をもつ．そしてそのとき，すべての g に対して

$$(\mathrm{H}f, g)=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(E(\lambda)f, g)$$

が成り立つ (このあとの積分は，はじめの積分が有限であれば絶対収斂する[78])——

---

77) これは，注 73) で与えたスチェルチェス積分の定義からでてくる．証明についてはそこにあげた論述をみよ．

78) Math. Ann. Bd. **102** (1929) をみよ．

$\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$. という性質のなかには H 自身はまったくはいってこない. この2つの性質をもった射影作用素の集り $E(\lambda)$ を単位の分解となづける. H に対して $\overline{S}_3$. のような関係にある単位の分解は H に属するといわれる.

こうして, $\mathfrak{R}_\infty$ の固有値問題はつぎのようになる: 与えられたエルミート作用素 H に対して, それに属する単位の分解がつねに存在するかどうか, そしてそれはいくつあるか? (つねに正確に1通りだけ存在するという答が望まれるのである). さらに, われわれの固有値問題の定義がどのように, 量子力学(とくに波動理論)において一般に使われるエルミート作用素の固有値の決定方法と関連しているか, を調べなければならない.

8. 固有値問題への予備的考察

固有値問題のわれわれの定義をまえにして, まずつぎのような疑問が湧いてくる: $\overline{S}_1$.—$\overline{S}_3$. は, 前節のはじめでわれわれが出発点にとった問題から, まったくかけはなれたものであり, もはやそれらのあいだに, どんな関係があるのか, まったくわからない. $\mathfrak{R}_n$ ではたしかにわれわれは $\overline{S}_1$.—$\overline{S}_3$. を例の条件から導きだしたけれども, $\mathfrak{R}_\infty$ では, 本質的に異った事情にある: 事実両方の定式化はここではすでに同等ではない(上述したように $\mathfrak{R}_n$ では同等であった). したがって問題全体があらためて提出されたのであって, 新しい定式化がどこまでまえのものを含むか, すなわち, いかなるときに, そしてどのように, われわれの $E(\lambda)$ は以前の $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ および $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を決定するか, ということを見出さなければならない.

エルミート作用素 A に単位の分解 $E(\lambda)$ が属するとしよう. いかなるときに方程式

$$A\varphi=\lambda_0\varphi$$

は解くことができるか? $A\varphi=\lambda_0\varphi$ はすべての g に対して

$$(A\varphi, g)-\lambda_0(\varphi, g)=0$$

と同じことを意味する. すなわち

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f, g)-\lambda_0(\varphi, g)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f, g)-\lambda_0\int_{-\infty}^{\infty}d(E(\lambda)f, g)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(E(\lambda)f, g).$$

最初に $g=E(\lambda_0)f$ とおく. そうすると

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(E(\lambda)f,\ E(\lambda_0)f)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(E(\lambda_0)E(\lambda)f,\ f)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(E(\mathrm{Min}(\lambda,\ \lambda_0))f,\ f)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\mathrm{Min}(\lambda,\lambda_0))f\|^2).$$

ここで $\int_{-\infty}^{\infty}$ を $\int_{-\infty}^{\lambda_0}+\int_{\lambda_0}^{\infty}$ に分けることができる. $\int_{-\infty}^{\lambda_0}$ では $\mathrm{Min}(\lambda,\lambda_0)$ を λ で, $\int_{\lambda_0}^{\infty}$ では λ_0 でおきかえることができる. それゆえ第2の積分において d-記号のもとには定数がくることになり, したがってそれは消える.

そうすると, まず残るのは

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\lambda)f\|^2)=0$$

となる. つぎに, $g=f$ とおくと

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(E(\lambda)f,\ f)=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

となる. これから第1の式を引き, 被積分函数の符号を逆にすると

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)d(\|E(\lambda)f\|^2)=0$$

がえられる. さて $\int_{-\infty}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)d(\|E(\lambda)f\|^2)$, $\int_{\lambda_0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\lambda)f\|^2)$ をもう少しくわしく考察してみよう. 被積分函数は両方とも $\geqq 0$ であり, かつ d-記号のもとには λ の単調非減少な函数がある. したがって任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)d(\|E(\lambda)f\|^2)\geqq\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}(\lambda_0-\lambda)d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

$$\geqq\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon}\varepsilon d(\|E(\lambda)f\|^2)=\varepsilon\|E(\lambda_0-\varepsilon)f\|^2,$$

$$\int_{\lambda_0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\lambda)f\|^2)\geqq\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)d(\|E(\lambda)f\|^2)\geqq\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty}\varepsilon d(\|E(\lambda)f\|^2)$$

$$=\varepsilon(\|f\|^2-\|E(\lambda_0+\varepsilon)f\|^2)=\varepsilon\|f-E(\lambda_0+\varepsilon)f\|^2$$

となる. ゆえに右辺は $\leqq 0$ であるが, しかしそれらはつねに $\geqq 0$ であるから, 消えなければならない. したがって:

$$E(\lambda_0-\varepsilon)f=0,\quad E(\lambda_0+\varepsilon)f=f.$$

$E(\lambda)$ は右へ連続であるから, 第2式で右から $\varepsilon\to 0$ ととることが許される:

$$E(\lambda_0)f=f.$$

$\lambda\geqq\lambda_0$ に対しては, 第2の式によって $(\varepsilon=\lambda-\lambda_0\geqq 0)$

$$E(\lambda)f=f.$$

$\lambda<\lambda_0$ に対しては，第１の式によって $(\varepsilon=\lambda^0-\lambda>0)$

$$E(\lambda)f=0.$$

したがって：

$$E(\lambda)f=\begin{cases} f & \lambda\geqq\lambda_0 \text{ のとき}, \\ 0 & \lambda<\lambda_0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

この必要条件はまた十分でもある．なぜなら，これから

$$(Af,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f,\ g)=\lambda_0(f,\ g)$$

が導かれる（注 73 にあたえられた，スチェルチェス積分の定義を思い浮べよう）から，すべての g に対して $(Af-\lambda_0 f,\ g)=0$, すなわち $Af=\lambda_0 f$ となるからである．

さて，どのようにこの条件を解すべきか？ まず第１にそれは $\lambda=\lambda_0$ という点での $E(\lambda)$ の不連続性を含んでいる．II. 4 の定理 *17* によると，$E(\lambda)$ は $\lambda\to\lambda_0,\ \lambda<\lambda_0$ に対しても，また同様に $\lambda\to\lambda_0,\ \lambda>\lambda_0$ に対してもそれぞれ射影作用素 $E^{(1)}(\lambda_0)$ および $E^{(2)}(\lambda_0)$ に近づくはずである[79]. $S_1.$ によって

$$E^{(2)}(\lambda_0)=E(\lambda_0)$$

であるが，不連続の場合には

$$E^{(1)}(\lambda_0)\neq E(\lambda_0)$$

である．$\lambda<\lambda_0$ に対して

$$E(\lambda)\leqq E(\lambda_0)$$

であるから $(S_2.)$，つねに

$$E^{(1)}(\lambda_0)\leqq E(\lambda_0).$$

したがって $E(\lambda_0)-E^{(1)}(\lambda_0)$ は射影作用素であり，それが $\neq 0$ であることが不連続性を特徴づける．

$$E^{(1)}(\lambda_0)f=0$$

は，すべての $\lambda<\lambda_0$ に対する

79）これは λ-数列に対してのみ証明された．しかしながら，すべてこれらの数列 $(\lambda\to\lambda_0$ および $\lambda<\lambda_0$ あるいは $\lambda>\lambda_0)$ に対する極限は同一でなければならない．２つのこのような数列は，一緒にしてまったく同じような数列にすることができるからである．——そしてまたこれが極限をもつから，両方の部分列は同じ極限をもたなくてはならない；このことから，λ が連続的に変化する場合にも，すべての数列の共通の極限へ収斂することが示される．

$$E(\lambda)f=0$$

から結論されるが，また（$E(\lambda)\leqq E^{(1)}(\lambda_0)$ によって）逆も言える．すべての $\lambda\geqq\lambda_0$ に対する

$$E(\lambda)f=f$$

は

$$E(\lambda_0)f=f$$

から導かれる：

$$E(\lambda_0)\leqq E(\lambda),$$
$$E(\lambda)E(\lambda_0)=E(\lambda_0)$$

であり，したがって

$$E(\lambda)f=E(\lambda)E(\lambda_0)f=E(\lambda_0)f=f.$$

それゆえ，$Af=\lambda_0 f$ を特徴づけるのは，

$$E^{(1)}(\lambda_0)f=0,\ E(\lambda_0)f=f,$$

あるいは（II.4 の定理 *14*）

$$(E(\lambda_0)-E^{(1)}(\lambda_0))f=f$$

である．すなわち，

$$E(\lambda_0)-E^{(1)}(\lambda_0)=P_{\mathfrak{M}_{\lambda_0}}$$

とおくと，うえのことは，f が $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ に属するということを意味する．

これによってつぎのことが示された；$Af=\lambda f$ は一般に $E(\lambda)$ の不連続点においてのみ $f\neq 0$ によって解くことができる．しかもその解 f はちょうどうえに定義した閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ を作る．

したがって，II.6 で求められた（事情によっては，さまざまな λ に属する）解の作る規格化された完全直交系は，$\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ $(-\infty<\lambda_0<\infty)$ が一緒になって閉じた線型多様体 $\mathfrak{R}_\infty$ を張るときに，しかもそのときにかぎって存在する．［そのときこの系がどのように構成されるかは，II.6 で論じておいた．$\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ 相互の直交性は，あらためて確認することができる：$\lambda_0<\mu_0$ から，

$$E(\lambda_0)-E^{(1)}(\lambda_0)\leqq E(\lambda_0)\leqq E^{(1)}(\mu_0)$$
$$E(\mu_0)-E^{(1)}(\mu_0)\leqq 1-E^{(1)}(\mu_0)$$

のために

$$P_{\mathfrak{M}_{\lambda_0}}P_{\mathfrak{M}_{\mu_0}}=(E(\lambda_0)-E^{(1)}(\lambda_0))(E(\mu_0)-E^{(1)}(\mu_0))=0].$$

このような事情にあるために要求されるより正確な条件を見出すことはやめて以下のことを確かめるだけにとどめる：$E(\lambda)$ が連続的に増大するような区

間 μ_1, μ_2 [すなわち $\mu_1<\mu_2$, $E(\lambda)$ は $\mu_1\leqq\lambda\leqq\mu_2$ で連続, $E(\mu_1)\neq E(\mu_2)$] が存在するならば，たしかにうえのような場合ではない．なぜなら，$\lambda\leqq\mu_1$ に対して

$$E(\lambda)-E^{(1)}(\lambda)\leqq E(\lambda)\leqq E(\mu_1),$$

$\mu_1<\lambda\leqq\mu_2$ に対しては連続性によって

$$E(\lambda)-E^{(1)}(\lambda)=0,$$

$\mu_2<\lambda$ に対しては

$$E(\lambda)-E^{(1)}(\lambda)\leqq 1-E^{(1)}(\lambda)\leqq 1-E(\mu_2).$$

したがって $E(\lambda)-E^{(1)}(\lambda)$ はつねに $E(\mu_2)-E(\mu_1)$ に直交している．$E(\mu_2)-E(\mu_1)=P_{\mathfrak{N}}$ とすると，すべての $\mathfrak{M}_\lambda$ は $\mathfrak{N}$ に直交している．かりに $\mathfrak{M}_\lambda$ から規格化された完全直交系をえらぶことができたとすると，$\mathfrak{N}$ はただ0だけしか含まないことになる，すなわち仮定に反して $E(\mu_2)-E(\mu_1)=0$ となる．

$E(\lambda)$ の不連続点をわれわれは A の点スペクトルとなづける．――それは，$Af=\lambda f$, $f\neq 0$ が解きうるような λ である．各 $\mathfrak{M}_\lambda\neq 0$ から $\|f\|=1$ であるような1つの f をえらびだすと，$\mathfrak{M}_\lambda$ の直交性によって規格化直交系ができる．II. 2. の定理 *3* によってこれは有限個しかないか，あるいは点列であるから，点スペクトルの λ も，たかだか数列を作るにすぎない．

その近傍で $E(\lambda)$ が不変でないようなすべての点は A のスペクトルを形成する．つぎのことがわかった：そのなかに点スペクトルではないが，とにかく A のスペクトルが入っているような区間――すなわち，そこで $E(\lambda)$ が不変ではないような $E(\lambda)$ の連続な区間――が存在する場合には，固有値問題は II. 6 のはじめに定式化されたような意味ではたしかに解くことができない．この解けない場合の正確な条件をさらに研究することはやらない：つまり場合によっては，スペクトルが存在するすべての区間のなかに，点スペクトルが入ってくるようなときにもまた解は不可能になる：そのときに点スペクトルを残りのものから分離することはかなり困難であり，しかも，もはやわれわれの目的に十分緊密に結びついてはいないのである（これについての研究は Hilbert のさきに引用した論文のなかに見られる）．

そのかわりにわれわれは，（$\varphi=\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に対してそれぞれ $\lambda=\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ をもった）$A\varphi=\lambda\varphi$ の解からなる規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が存在する場合に――この場合を純粋な点スペクトルとよばう――$E(\lambda)$ がどのように構成されるかを示そうと思う．それは

$$E(\lambda)=\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda}P_{[\varphi_\rho]}$$

である[80]（和 $\sum$ のもとに加えられる項は0個であってもよい．そのときには $E(\lambda)=0$ である；あるいは無限に多いときもあるが，そのときには II.4 の終りに述べたことによってそれは収斂する）．

実際：$\bar{S}_2$. は自明である，というのは $\lambda'\leqq\lambda''$ に対して

$$E(\lambda'')-E(\lambda')=\sum_{\lambda'<\lambda_\rho\leqq\lambda''}P_{[\varphi_\rho]}$$

は射影作用素であり，したがって $E(\lambda')\leqq E(\lambda'')$ である（定理 *14*）．$\bar{S}_1$. はつぎのようにして証明される：任意の f に対して

$$\sum_\rho\|P_{[\varphi_\rho]}f\|^2=\sum_\rho|(f,\ \varphi_\rho)|^2=\text{注 81)}=\|f\|^2$$

（定理 *7*）である．すなわち $\sum_\rho\|P_{[\varphi_\rho]}f\|^2$ は収斂する．したがって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限個の ρ をとり出してこれらについてのみとった $\sum_\rho$ がすでに $>\|f\|^2-\varepsilon$ となるようにすることができる．それゆえ，それらの点をのぞいた，すべての $\sum_\rho{}'$ は $<\varepsilon$ である．したがってまた，

$$\|\sum_\rho{}'P_{[\varphi_\rho]}f\|^2=\sum_\rho{}'\|P_{[\varphi_\rho]}f\|^2<\varepsilon$$

である．これから，とりわけつぎの関係が導かれる：もし λ をそれぞれ，十分小さく，あるいは十分大きく，あるいは十分 λ_0 に近く（かつ $\geqq\lambda_0$）えらべば

$$\|\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\|^2<\varepsilon,\quad \|\sum_{\lambda_\rho>\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\|^2<\varepsilon,\quad \|\sum_{\lambda_0<\lambda_\rho\leqq\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\|^2<\varepsilon.$$

したがって，たしかに

$$\lambda\to-\infty \text{ に対して，} E(\lambda)f=\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\to0,$$

$$\lambda\to+\infty \text{ に対して，} f-E(\lambda)f=\sum_{\lambda_\rho>\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\to0^{82)},$$

---

80) これは II.7 に与えられた $E(\lambda;\ \xi,\ \eta)$ の定義の正確な移しかえである．

81) 定理 10. の証明のさいに導入した構成が示すように，（$\|\varphi\|=1$ であるときには）$P_{[\varphi]}f=(f,\ \varphi)\cdot\varphi$ であり，したがって

$$\|P_{[\varphi]}f\|=|(f,\ \varphi)|=|(\varphi,\ f)|$$

82)
$$f=\sum_\rho(f,\ \varphi_\rho)\cdot\varphi_\rho=\sum_\rho P_{[\varphi_\rho]}f$$

（定理 7.）である．これはまた II.4 の終りの考察からも導かれる．

$\lambda\to\lambda_0$, $\lambda\geqq\lambda_0$ に対して,

$$E(\lambda)f-E(\lambda_0)f=\sum_{\lambda_0<\lambda_\rho\leqq\lambda}P_{[\varphi_\rho]}f\to 0.$$

すなわち, $\bar{S}_1$. はみたされている.

$\bar{S}_3$. が成立していることを確かめるために,

$$f=x_1\varphi_1+x_2\varphi_2+\cdots\cdots,\ \text{したがって}\quad Af=\lambda_1x_1\varphi_1+\lambda_2x_2\varphi_2+\cdots\cdots$$

とおこう. したがって, Af が意味をもつためには

$$\sum_{\rho=1}^{\infty}\lambda_\rho{}^2|x_\rho|^2$$

が有限でなければならない. ところで

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\Bigl(\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda}|x_\rho|^2\Bigr)=\text{注 83)}=\sum_{\rho=1}^{\infty}\lambda_\rho{}^2|x_\rho|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\Bigl(\sum_{\lambda_\rho\geqq\lambda}x_\rho\bar{y}_\rho\Bigr)=\text{注 83)}=\sum_{\rho=1}^{\infty}\lambda_\rho x_\rho\bar{y}_\rho=(Af,\ g).$$

したがって $\bar{S}_3$. もまたみたされている.

さらに, 純粋な連続スペクトルの場合, すなわち, 点スペクトルがまったく現われない場合を2つ考察しよう. $\mathfrak{R}_\infty$ を有限な

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(q_1\cdots\cdots q_l)|^2dq_1\cdots\cdots dq_l$$

をもつすべての函数 $f(q_1\cdots\cdots q_l)$ の空間であるとし, A を作用素 $q_j\cdots\cdots$, とする. そのエルミート性は明らかである.

$Af=\lambda f$ は

---

83) 注 73) によると

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2d(\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda}|x_\rho|^2)=\lim\sum_{\tau=1}^{k}\Lambda_\tau{}^2\sum_{\Lambda_{\tau-1}<\lambda_\rho\leqq\Lambda_\tau}|x_\rho|^2.$$

もし, つねに $\Lambda_\tau{}^2-\Lambda_{\tau-1}{}^2<\varepsilon$ であれば (すなわち $\Lambda_0,\cdots\cdots,\Lambda_k$ の網が十分細かければ), これを

$$\sum_{\tau=1}^{k}\sum_{\Lambda_{\tau-1}<\lambda_\rho\leqq\Lambda_\tau}\lambda_\rho{}^2|x_\rho|^2=\sum_{\Lambda_0<\lambda_\rho\leqq\Lambda_k}\lambda_\rho{}^2|x_\rho|^2$$

でおきかえても, $<\varepsilon\sum_{\rho=1}^{\infty}|x_\rho|^2=\varepsilon\|f\|^2$ だけしか変化しない. そしてこのあとの表式は, もし Λ_0 が十分小さく, Λ_k が十分大きいときには, $\sum_{\tau=1}^{\infty}\lambda_\rho{}^2|x_\rho|^2$ に任意に近くなる. したがってこの和は求める極限, すなわち積分の値である. まったく同様につぎの積分の式も証明される.

$$(q_j-\lambda)f(q_1,\cdots\cdots,q_l)=0,$$

すなわち $l-1$ 次元の平面 $q_j=\lambda$ という，ありうる例外を除いて，$f(q_1,\cdots\cdots,q_l)=0$ を意味することがわかる．しかしながら，この平面は，ルベーグ測度（すなわち体積）が0に等しいから，（II. 3. で条件 **B.** について述べたことによって）本質的ではない：それゆえ $f\equiv 0$ である[84]．それだから $Af=\lambda f$ の0でない解はまったく存在しない．けれどもわれわれは，またどこにその解を予期すべきかを知っている（厳密ではない!）．$(q_j-\lambda)f(q_1,\cdots\cdots,q_l)=0$ は，$q_j=\lambda$ に対してのみ $f\neq 0$ となりうることを意味する．したがって，いくつかの λ，たとえば $\lambda=\lambda',\lambda'',\cdots\cdots,\lambda^{(s)}$ に対する解の1次結合は，ただ

$$q_j=\lambda',\ \lambda'',\ \cdots\cdots\lambda^{(s)}$$

に対してのみ $\neq 0$ であるような f であろう．したがって $\lambda\leqq\lambda_0$ のときにだけ $\neq 0$ となるような f を $\lambda\leqq\lambda_0$ に対するあらゆる解の1次結合とみなすこ

84） この点で，われわれがしたがってきた数学的に正しい方法は Dirac の記号的な手続き（たとえば注 1）にあげた本をみよ）から分れる．後者の手続きはけっきょく $(q-\lambda)f(q)\equiv 0$ である f をも解とみなすことにつきる（簡単のため $l=j=1$，$q_j=q$ とおいた）．しかしすべての $(f,g)=\int f(q)\overline{g(q)}dq=0$ であり，しかも $f\neq 0$ でなければならないのであるから，$f(q)$ は $q=\lambda$ の点で（それが $\neq 0$ である唯1つの点!）無限大，しかも $(f\cdot g)\neq 0$ となるように強く無限大になると考えられる．$q\neq\lambda$ に対しては $f(q)=0$ であるから $\int f(q)\overline{g(q)}dq$ は $\overline{g(\lambda)}$ にだけしか依存しない．そのうえこの積分が，加法性のために $\overline{g(\lambda)}$ に比例するはずであることも明らかである．したがって $=c\overline{g(\lambda)}$ であり，$c\neq 0$ でなければならない．$f(q)$ を $\frac{1}{c}f(q)$ でおきかえて $c=1$ にすることができる．したがってわれわれは

$$\int f(q)\overline{g(q)}dq=\overline{g(\lambda)}$$

が成り立つような，仮想的な函数 $f(q)$ をうる．

もちろん $\lambda=0$ という場合を考察すればよい．そのとき $f(q)$ を $\delta(q)$ といい，

Δ. $$q\delta(q)\equiv 0,\qquad \int\delta(q)f(q)dq=f(0)$$

で定義される．そうすると任意の λ に対して $\delta(q-\lambda)$ が解になる——Δ. という性質をもつ函数 δ は存在しないけれども，このようなふるまいをするものに収斂する函数列はある（もちろん極限の函数は存在しない）．たとえば

$$\varepsilon\to+0 \text{ において } f_\varepsilon(q)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x|<\varepsilon \text{ に対して}\\ 0, & |x|\geqq\varepsilon \text{ に対して}\end{cases}$$

あるいは

$$a\to+\infty \text{ において}\qquad f_a(q)=\sqrt{\frac{a}{\pi}}e^{-ax^2}$$

（また I. 3. とくに注 32）を参照）．

とができる．しかし純粋な点スペクトルの場合には

$$E(\lambda_0)=\sum_{\lambda_\rho\leqq\lambda_0}P_{[\varphi_\rho]}=P_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}},\quad \mathfrak{N}_{\lambda_0}=[\varphi_{\rho(\lambda_\rho\leqq\lambda_0)}]$$

であった．すなわち $\mathfrak{N}_\lambda$ は，$\lambda_\rho\leqq\lambda_0$ であるすべての φ_ρ，すなわち $\lambda\leqq\lambda_0$ であるような $Af=\lambda f$ のすべての解の１次結合からできていた．かようにして，いまの場合には

$$E(\lambda_0)=P_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$$

であることが，——もちろん厳密ではなく，発見法的にではあるが！——期待される．そこで $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ は $q_j\leqq\lambda_0$ に対してだけ $\neq 0$ となるような f からなりたっている．そうすると，$\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ は明らかに $q_j\leqq\lambda_0$ に対してつねに $=0$ であるような f から成り立っている——したがって

$$E(\lambda_0)f(q_1\cdots\cdots q_l)=\begin{cases}f(q_1\cdots\cdots q_l), & q_j\leqq\lambda_0\\ 0 & q_j>\lambda_0\end{cases}$$

である．

われわれは，まったく厳密ではないやりかたで，射影作用素 $E(\lambda)$ の集りを見出した．それがわれわれの A に対する $\overline{S}_1.$—$\overline{S}_3.$ をみたすことが予期される．実際，$\overline{S}_1.$, $\overline{S}_2.$ がみたされていることは自明であり，しかも $\overline{S}_1.$ における $\lambda\to\lambda_0$ の場合は $\lambda\geqq\lambda_0$ という附加条件がなくともよい．——すなわち，$E(\lambda)$ は λ についていたるところ連続である．$\overline{S}_3.$ もみたされていることを見るためには，つぎの等式が成り立つことを確めればよい：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(q_1\cdots\cdots q_j\cdots\cdots q_l)|^2dq_1\cdots dq_j\cdots dq_l\Big)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(q_1\cdots q_{j-1}\lambda q_{j+1}\cdots q_l)|^2dq_1\cdots dq_{j-1}dq_{j+1}\cdots dq_l\Big)d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}q_j^2|f(q_1\cdots q_{j-1}q_jq_{j+1}\cdots q_l)|^2dq_1\cdots dq_{j-1}dq_jdq_{j+1}\cdots dq_l=\|Af\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f,g)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\lambda}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(q_1\cdots q_j\cdots q_l)\overline{g(q_1\cdots q_j\cdots q_l)}dq_1\cdots dq_j\cdots dq_l)\Big)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(q_1\cdots q_{j-1}\lambda q_{j+1}\cdots q_l)\overline{g(q_1\cdots q_{j-1}\lambda q_{j+1}\cdots q_l)}$$

$$\cdot dq_1\cdots dq_{j-1}dq_{j+1}\cdots dq_l\Big)d\lambda$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}q_j f(q_1\cdots q_{j-1}q_jq_{j+1}\cdots q_l)\overline{g(q_1\cdots q_{j-1}q_jq_{j+1}\cdots q_l)}$$

$$\cdot dq_1\cdots dq_{j-1}dq_jdq_{j+1}\cdots dq_l=(Af,\ g).$$

$E(\lambda)$ がいたるところ連続に増大するから，点スペクトル，または固有値問題の古い定義が役に立たないようにならざるをえないことが，あらためて認められる．

この例は，一般の場合に，どのようにして連続スペクトルにおける $E(\lambda)$ を見出すべきかを指示している：$Af=\lambda f$ の解（正しくはない!）を定める（λ は連続スペクトルのなかにあるのだから，この f はけっして $\Re_\infty$ に属さない!）．そしてすべての $\lambda\leqq\lambda_0$ に対するそれの1次結合を作る．これは部分的にはふたたび $\Re_\infty$ に属し，場合によっては閉じた線型多様体 $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ を作る．それから $E(\lambda_0)=P_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ とおく——もし正しいやり方をしてきたのであれば，あとで $\overline{S}_1.$—$\overline{S}_3.$ を［A およびこの $E(\lambda)$ に対して］証明し，そして発見法的な推論のやり方をあとから厳密なものにすることができる[85]．

われわれが考察しようと思う第2の例は波動力学のもう1つの重要な作用素，$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_j}$ である．本質的でない複雑さをさけるために $l=j=1$ とする（そうでないときも同様である）．だからわれわれは作用素

$$A'f(q)=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}f(q)$$

を研究しなければならない．q の変域が $-\infty<q<+\infty$ であれば，II.5 で見たように，これはエルミート作用素である．これに反して有限の変域 $a\leqq q\leqq b$ に対してはそうではない：

$$(A'f,\ g)-(f,\ A'g)=\int_a^b\frac{h}{2\pi i}f'(q)\overline{g(q)}dq-\int_a^b f(q)\overline{\frac{h}{2\pi i}\ g'(q)}dq$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int_a^b\{f'(q)\overline{g(q)}+f(q)\overline{g'(q)}\}dq=\frac{h}{2\pi i}[f(q)\overline{g(q)}]_a^b$$

$$=\frac{h}{2\pi i}[f(b)\overline{g(b)}-f(a)\overline{g(a)}].$$

これが消えるためには，$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ の定義域が，そのなかから任意に2つえら

85）このような（ここではたんに発見法的な手がかりとしてしか認められない）考えを厳密に詳論したものは Hellinger〔J. f. Math. Bd. 136 (1909)〕および Weyl [Math. Ann. Bd. 68 (1910)] に見出される．

び出した f, g に対して

$$f(a)\overline{g(a)}=f(b)\overline{g(b)}$$

であるように限定されなければならない．すなわち

$$f(a):f(b)=\overline{g(b)}:\overline{g(a)}.$$

g をとめて f を動かすとつぎのことがわかる：$f(a):f(b)$ は全定義域において同じ数 θ でなければならない（θ は場合によっては 0 あるいは ∞ にもなる）；f の代りに g とおいて $\theta=\dfrac{1}{\bar{\theta}}$ がえられる．すなわち $|\theta|=1$，すなわち $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}$ がエルミートであるためには，なお

$$f(a):f(b)=\theta$$

（θ は絶対値が 1 のある定まった数）という形の"境界条件"を仮定しなければならない．

まず最初に区間 $-\infty<q<+\infty$ をとろう．$A'\varphi=\lambda\varphi$ すなわち $\dfrac{h}{2\pi i}\varphi'(q)=\lambda\varphi(q)$ の解は

$$\varphi(q)=ce^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$$

という函数であるが，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(q)|^2dq=\int_{-\infty}^{\infty}|c|^2dq=+\infty$$

であるから（$c=0$, $\varphi\equiv 0$ でなければ），これはそのままわれわれの目的に使うわけにはいかない．注意すべきことは：第1の例では，われわれは解 $\delta(q-\lambda)$，すなわち仮想的な——存在しない函数（注 84）参照）を見出した；こんどは $e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$，すなわちまったく普通の函数をえたのであるが，これはその絶対値の 2 乗の積分が無限大であるから $\mathfrak{R}_\infty$ に属さない．われわれの立場からすれば両方とも同じである：というのは $\mathfrak{R}_\infty$ に属さないものは，われわれにとって存在しないのであるから[86]．

第1の場合におけるように，$\lambda\leqq\lambda_0$ に属する解の1次結合，すなわち，函数

$$f(q)=\int_{-\infty}^{\lambda_0}c(\lambda)e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}\,d\lambda$$

86）もちろん物理学に適用したときの成果のみがこの立場，ないしはそれを量子力学で通用させることを正当化する．

を構成しよう――これらの函数のなかに $\mathfrak{R}_\infty$ に属するものが現われること，さらにはそれらが閉じた線型多様体 $\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ を作ること，そして最後に，射影作用素 $E(\lambda_0)=P_{\mathfrak{N}'_{\lambda_0}}$ が A' に属する単位の分解を作ることが期待される．最初の推測に対する例として，たとえば

$$c(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\geqq\lambda_1 \text{ に対して,} \\ 0, & \lambda<\lambda_1 \text{ に対して,}\end{cases}\quad \lambda_1<\lambda_0$$

とおいてつぎの函数をうる：

$$f(q)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}\,d\lambda=\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda_0 q}-e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda_1 q}}{\frac{2\pi i}{h}q}.$$

なぜなら，この $f(q)$ は有限なところではいたるところ正則であり，また $q\to\pm\infty$ に対して $\frac{1}{q}$ のように減少し，したがって $\int_{-\infty}^{\infty}|f(q)|^2dq$ が有限であるからである．また残りの推測も正しい．実際それはフーリエ積分の理論から導かれる．すなわちこの理論は以下のことを明らかにしている[87]：

$f(x)$ は $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$ を有限にするようなある函数としよう．すると

$$Lf(x)=F(y)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(x)dx$$

という函数が作られるが，これに対しても $\int_{-\infty}^{\infty}|F(y)|^2dy$ は，ふたたび有限であり，しかもそれは $=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx$ である．なおまた

$$LLf(x)=f(-x)$$

である（これはいわゆるラプラス変換であり，ほかにも微分方程式論で大きな役割を演ずる）．

x, y を $\sqrt{\frac{2\pi}{h}}q$, $\sqrt{\frac{2\pi}{h}}p$ でおきかえると，同じ性質をもつ変換

$$Mf(q)=F(p)\equiv\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{2\pi i}{h}pq}f(q)dq$$

がえられる．したがってそれは $\mathfrak{R}_\infty$ を自分自身に写像し [$Mf(q)=g(p)$ は $\mathfrak{R}_\infty$ の任意の g に対して解くことができる：$f(q)=Mg(-p)$], $\|f\|$ を不変にし，そして線型である：II. 5 によってこの M はユニタリーである．そのさい $M^2f(q)=f(-q)$ であり，したがって

87) Planscherel: Circ. Mach. di Pal. Bd. 30 (1910); Titchmarsh: London Math. Soc. Proc. Bd. 22 (1924).

$$M^{-1}f(q)=M^*f(q)=Mf(-q).$$

そしてまた M は M^2, すなわち $f(q)\to f(-q)$ と可換である.

$\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ に対して期待したことは, したがってこういうことだったのだ. $f(q)$ は, もしすべての $p>\lambda_0$ に対して $F(p)=M^{-1}f(q)$ が0に等しければ, $\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ に属する. (もとの $c(\lambda)$ で表わすと

$$F(p)=\sqrt{h}\,c(p)$$

である). この $F(p)$ が閉じた線型多様体 $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ を作ることはわかっているから, またそれの M による像, $\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ もそうである. ちょうど $\mathfrak{N}'_{\lambda_0}$ が $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ から生ずるように $E'(\lambda_0)$ は $E(\lambda_0)$ から M による $\mathfrak{R}_\infty$ 全体の変換によって生ずる——したがって

$$E'(\lambda_0)=ME(\lambda_0)M^{-1}$$

である. それゆえ, $E'(\lambda)$ は $E(\lambda)$ とまったく同じように性質 $\overline{S}_1$., $\overline{S}_2$. をもつが, なお $\overline{S}_3$ を証明する必要がある——すなわち単位の分解 $E(\lambda)$ が A' に属することである.

われわれは, つぎの命題を示すにとどめる: もし $f(q)$ が特別な収斂の困難なしに微分可能であり, $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{h}{2\pi i}f'(q)\right|^2dq$ が有限であれば, $\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E'(\lambda)f\|^2$ は有限であり,

$$(A'f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E'(\lambda)f,\ g)$$

である[88]. 実際, $(M^{-1}f(q)=F(p))$

$$A'f(q)=\frac{h}{2\pi i}f'(q)=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}(MF(p))$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\int F(p)e^{\frac{2\pi i}{h}pq}dp\right)$$

$$=\frac{\sqrt{h}}{2\pi i}\int F(p)\frac{\partial}{\partial q}(e^{\frac{2\pi i}{h}pq})dp$$

$$=\frac{1}{\sqrt{h}}\int F(p)\cdot p\cdot e^{\frac{2\pi i}{h}pq}dp=M(pF(p))$$

である. したがって, うえのような f に対しては

---

88) すなわち $E'(\lambda)$ は $A'=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ 自体に属するのではなく, その定義域が A' のものを含み, A' の定義域のなかでは A' と一致するような作用素に属するのである. これにかんしては II.9 の詳論を見よ.

$$A' = MAM^{-1}$$

(A は作用素 $q\cdots\cdots$, あるいはここでは変数 p を用いているから $p\cdots\cdots$ である). うえの主張は, A, $E(\lambda)$ に対しては成り立つから, また $\mathfrak{R}_\infty$ を M で変換したのちにも成り立つ. : したがってそれらの主張は $A'=MAM^{-1}$ および $E'(\lambda)=ME(\lambda)M^{-1}$ に対しても, また成り立つ.

区間 $a \leqq q \leqq b$ ($a<b$, a, b 有限) における $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}$ では事情は本質的に異なる——この場合には, すでに知っているように, エルミート性を保証するために "境界条件"

$$f(a) : f(b) = \theta \qquad (|\theta| = 1)$$

が必要である. $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}f(q) = \lambda f(q)$ はふたたび

$$f(q) = ce^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$$

によって解かれるが, こんどは

$$\int_a^b |f(q)|^2 dq = \int_a^b |c|^2 dq = (b-a)|c|^2$$

は有限であり, したがって $f(q)$ はつねに $\mathfrak{R}_\infty$ に属する. そのかわりに, なお境界条件がみたされなければならない:

$$f(a) : f(b) = e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda(a-b)} = \theta,$$

あるいは, $\theta = e^{-i\alpha}$ ($0 \leqq \alpha < 2\pi$) とおけば

$$\frac{2\pi i}{h}\lambda(a-b) = -i\alpha - 2k\pi i \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

$$\lambda = \frac{h}{b-a}\left(\frac{\alpha}{2\pi} + k\right).$$

したがって, 点スペクトルであり, 規格化された解は $(b-a)|c|^2 = 1$ によって, それゆえたとえば $c = \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}$ によって, 特徴づけられる:

$$\varphi_k(q) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} e^{\frac{2\pi i}{b-a}\left(\frac{\alpha}{2\pi}+k\right)q} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots,$$

したがってこれは規格化直交系であるが, それはまた完全でもある. なぜならば, かりに $f(q)$ がすべての $\varphi_k(q)$ に直交するとすると $e^{\frac{\alpha i}{b-a}q} f(q)$ はすべての $e^{\frac{2\pi i}{b-a}kq}$ に直交し, したがって $e^{\frac{\alpha i}{2\pi}x} f\left(\dfrac{b-a}{2\pi}x\right)$ はすべての e^{ikx}, すなわち, 1, $\cos x$, $\sin x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cdots\cdots$ に直交することになる. ところでそ

れは長さが 2π である区間

$$a \leqq \frac{b-a}{2\pi} x \leqq b$$

で定義されているから，よく知られた定理によって消えなければならない[89]．それゆえ実際 $f(q) \equiv 0$ である．

このようにして，純粋な点スペクトルだけがあることになり，それはわれわれが，この節のはじめに一般的に解決したところの場合にほかならない．"境界条件"――すなわち θ ないしは α――がどのように固有値および固有函数に影響するかを注意しよう．

最後に，半有限な区間，$0 \leqq q < +\infty$ があるような場合もまた考察することができる．ここでもまた，なによりさきにエルミート性を調べなければならない．それは

$$(A'f, g)-(f, A'g)=\frac{h}{2\pi i}\int_0^{+\infty}(f'(q)\overline{g(q)}+f(q)\overline{g'(q)})dq$$
$$=\frac{h}{2\pi i}[f(q)\overline{g(q)}]_0^{+\infty}$$

である．$q \to +\infty$ のとき $f(q)\overline{g(q)}$ は 0 に近づくことは II. 5 の区間 $-\infty$, $+\infty$ の場合と同じようにして示される．したがって $f(0)\overline{g(0)}=0$ でなければならない．$f=g$ において"境界条件"は $f(0)=0$ であることがわかる．

この場合には容易ならぬ困難が生ずる．$A'\varphi=\lambda\varphi$ の解は区間 $-\infty<q<+\infty$ の場合におけるものと同一であり，すなわち

$$ce^{\frac{2\pi i}{h}\lambda q}$$

である――それらは $\mathfrak{R}_\infty$ に属さないし，また境界条件に反する．このことは不審の念をおこさせる．しかしそれよりももっとおかしいことは，（本来のものではない，すなわち $\mathfrak{R}_\infty$ に属さない）解が区間 $-\infty<q<+\infty$ のときと同一であるから，まえに述べた手続きにしたがってえられる $E(\lambda)$ も必然的に同一でなければならないということである．このことと作用素が別であることとをどのように折合わせるべきか? 事実それらの解はわれわれの必要とするものではない：なぜなら，かりに $f(q)\left(0 \leqq q<+\infty,\ \int_0^\infty |f(q)|^2 dq \text{ 有限}\right)$ のヒルベルト空間 F_Ω' においてふたたび M, M^{-1} を定義するとする：

89) すべてのフーリエ係数が消えるから，その函数自身もまた消える．たとえば Courant-Hilbert（上述の注 30）を参照．

$$Mf(q)=F(p)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_0^\infty e^{\frac{2\pi i}{h}pq}f(q)dq,$$

$$M^{-1}F(p)=f(q)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{2\pi i}{h}pq}F(p)dp\quad(=MF(-p)).$$

そうすると M はすべての $f(q)$

$$0\leqq q<\infty,\quad \int_0^\infty |f(q)|^2dq$$

のヒルベルト空間 F_Ω' をもう１つのヒルベルト空間に写像する．それはすべての $F(p)$,

$$-\infty<p<\infty,\quad \int_{-\infty}^\infty |F(p)|^2dp.$$

のつくる F_Ω'' である．当然 $\|Mf(q)\|=\|f(q)\|$ はつねに成り立っているが（これはまえにのべた定理から，$f(q)$ を $-\infty<q<0$ で０に等しいとおけば導かれる），$\|M^{-1}F(p)\|=\|F(p)\|$ は一般にけっして正しくはない——というのは，まえにふれた定理にもとづいて，もし $q<0$ に対しても $f(q)$ を

$$f(q)=\frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{2\pi i}{h}pq}F(q)dp$$

で定義すれば，

$$\|F\|^2=\int_{-\infty}^\infty |F(p)|^2dp=\int_{-\infty}^\infty |f(q)|^2dq,$$

$$\|M^{-1}F\|^2=\|f\|^2=\int_0^\infty |f(q)|^2dq$$

である．——したがって，たまたますべての $q<0$ に対して $f(q)$ が（すぐうえで定義しなければならなかったように）消えるのでなければ，$\|M^{-1}F\|<\|F\|$ である．したがって $E'(\lambda)=ME(\lambda)M^{-1}$ はけっして単位の分解ではない[90]——この方法は役に立たなかったのである．

90）つまり，たしかに $M^{-1}Mf(q)=f(q)$ であるが（$q<0$ に対して $f(q)$ は０に等しいと定義し，以前の定理を適用すればよい），つねに $MM^{-1}F(p)=F(p)$ ではない．——一般に $\|M^{-1}F\|<\|F\|$ であるから $\|MM^{-1}F\|<\|F\|$ である．それゆえ $M^{-1}M=1$, $MM^{-1}\neq 1$, すなわち M^{-1} はけっして M の本当の逆ではない（またそのほかにも逆はありえない，なぜかというと，もしあるとすれば，それは $M^{-1}M=1$ のために，われわれの M^{-1} に等しくなければならないからである）．その結果，$E'(\lambda)=ME(\lambda)M^{-1}$ に対して，たとえば $E'^2(\lambda)=E'(\lambda)$ という結論はなお成り立ちうるが（$M^{-1}M$ だけしかかかわらないから），しかし $E'(\lambda)\to MM^{-1}\neq 1$（$\lambda\to+\infty$ のとき）である．

このことが問題の本質をついていることを，われわれはまもなく（注 105 で）見るであろう．というのは，この作用素にはまったく単位の分解が属さないからである．

この予備的考察を終るまえに，単位の分解を使って記号的な形

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

に表わされた作用素に対するいくつかの算法の規則をあたえておこう．

最初に F をすべての $E(\lambda)$ と交換可能な射影作用素としよう．そのときすべての $\lambda'<\lambda''$ に対して

$$\|E(\lambda'')Ff-E(\lambda')Ff\|^2=\|(E(\lambda'')-E(\lambda'))Ff\|^2$$
$$=\|F(E(\lambda'')-E(\lambda'))f\|^2\leqq\|(E(\lambda'')-E(\lambda'))f\|^2.$$

したがって，$E(\lambda'')$, $E(\lambda')$, $E(\lambda'')-E(\lambda')$，そしてまた

$$E(\lambda'')F,\ E(\lambda')F,\ E(\lambda'')F-E(\lambda')F=(E(\lambda'')-E(\lambda'))F$$

は射影作用素であるから，

$$\|E(\lambda'')Ff\|^2-\|E(\lambda')Ff\|^2\leqq\|E(\lambda'')f\|^2-\|E(\lambda')f\|^2$$

である．それゆえ

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2\geqq\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|E(\lambda)Ff\|^2$$

であり，したがって，S_3. によって AFf は，Af が意味をもつときに意味をもつ．さらにそのとき

$$AF=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)F)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(FE(\lambda))=FA^{91)}.$$

すなわち，A, F は交換可能でもある．F としてとくに各 $E(\lambda)$ をとることができる（$\overline{S}_2$. のために），そのときには

$$AE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda' d(E(\lambda')E(\lambda))=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda' d(E(\mathrm{Min}(\lambda,\ \lambda'))$$

---

91) 実際はこれは記号的にではなく，げんみつな式

$$(Af,\ g)=\int\lambda d(E(\lambda)f,\ g)$$

を使って証明されなければならない．そのときにはつぎのように計算される：

$$(AFf,\ g)=\int\lambda d(E(\lambda)Ff,\ g)=\int\lambda d(FE(\lambda)f,\ g)$$
$$=\int\lambda d(E(\lambda)f,\ Fg)=(Af,\ Fg)\equiv(FAf,\ g)$$

これから $AF=FA$ が導かれる．

$$=\int_{-\infty}^{\lambda}+\int_{\lambda}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\lambda}\lambda' dE(\lambda')+\int_{\lambda}^{\infty}\lambda' dE(\lambda)$$

であり，d のあとに定数がくるために $\int_{\lambda}^{\infty}=0$ であるから，

$$AE(\lambda)=E(\lambda)A=\int_{-\infty}^{\lambda}\lambda' dE(\lambda').$$

これからさらに，

$$A^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)A)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}\lambda' dE(\lambda')\right)=\text{注 }92)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 dE(\lambda)$$

が導かれる．一般に

$$A^n=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^n dE(\lambda)$$

が成り立つ．帰納的に $n-1$ から n の場合が結論されるからである；

$$A^n=A^{n-1}A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{n-1}d(E(\lambda)A)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{n-1}d\left(\int_{-\infty}^{\lambda}\lambda' dE(\lambda')\right)$$

$$=\text{注 }92)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{n-1}\cdot\lambda dE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^n dE(\lambda).$$

したがって，$p(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$ をある多項式として

$$p(A)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\lambda)dE(\lambda)$$

が成り立つ（当然 $p(A)$ は

$$p(A)=a_0 1+a_1A+\cdots\cdots a_nA^n$$

と解され $\int_{-\infty}^{\infty}dE(\lambda)=1$ は $\overline{S}_1.$ から示される）．

続いてつぎのことを確立しておく；$r(\lambda)$，$s(\lambda)$ がなんらかの函数であり，そして2つの作用素 B, C を記号的に

$$B=\int_{-\infty}^{\infty}r(\lambda)dE(\lambda),\quad C=\int_{-\infty}^{\infty}s(\lambda)dE(\lambda)$$

---

92) これはスチェルチェス積分に対して一般に成り立つ式

$$\int f(\lambda)d\left(\int^{\lambda}g(\lambda')dh(\lambda')\right)=\int f(\lambda)g(\lambda)dh(\lambda)$$

から導かれる．この式は，d と $\int^{\lambda}$ のあいだの相反関係にもとづいてたやすく理解される．厳密な証明は著者によって与えられた：*Annals of Mathematics* Bd. **32** (1931)

でもって定義するとすれば[93]

$$BC=\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)s(\lambda)dE(\lambda)$$

が成り立つ．この証明は，特別の場合 $B=C=A$ のときと，まったく同じように行われる：

$$BE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda')d(E(\lambda')E(\lambda))=\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda')d(E(\mathrm{Min}(\lambda,\ \lambda')))$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda}+\int_{\lambda}^{\infty}=\int_{-\infty}^{\lambda} r(\lambda')dE(\lambda')+\int_{\lambda}^{\infty} r(\lambda')dE(\lambda)$$

$$=\int_{-\infty}^{\lambda} r(\lambda')dE(\lambda'),$$

$$CB=\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)d(BE(\lambda))=\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)d\Big(\int_{-\infty}^{\lambda} r(\lambda')dE(\lambda')\Big)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)\cdot r(\lambda)dE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)r(\lambda)dE(\lambda).$$

つぎの関係は証明するまでもない：

$$B^*=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{r(\lambda)}dE(\lambda),\quad aB=\int_{-\infty}^{\infty} ar(\lambda)dE(\lambda),$$

$$B\pm C=\int_{-\infty}^{\infty}(r(\lambda)\pm s(\lambda))dE(\lambda).$$

したがって，このような函数 $r(\lambda)$ に対してもまた $B=r(A)$ と書くことを妨げる形式的な障害は何もない[94]．とくに注目に値するのは（不連続な！）函数

$$e_\lambda(\lambda')=\begin{cases}1, & \lambda'\leqq\lambda.\\ 0, & \lambda'>\lambda.\end{cases}$$

である．これに対しては（$\overline{S}_1$. によって）

$$e_\lambda(A)=\int_{-\infty}^{\infty} e_\lambda(\lambda')dE(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} dE(\lambda')=E(\lambda)$$

---

93) すなわち

$$(Bf,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)d(E(\lambda)f,\ g)$$

$$(Cf,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\lambda)d(E(\lambda)f,\ g)$$

94) この函数の概念のげんみつな基礎づけは著者が Annals of Math. Bd 32 (1931) であたえた．最初に，多項式からの極限移行によって一般的な作用素函数を定義したのは F. Riesz である．

が成り立つ（この節のはじめに，われわれは作用素 $A=q_j\cdots\cdots$ を考察した．それの $E(\lambda)$ は，$q_j\leqq\lambda$ あるいは $>\lambda$ のときに，それぞれ1あるいは0をかけること，すなわち $e_\lambda(q)$ をかけることであった．したがって

$$e_\lambda(q_j\cdots\cdots)=e_\lambda(q_j)\cdots\cdots$$

であり，この概念構成をこれによって具体的に考えることができる）．

9. 固有値問題の解とその一意性

与えられたエルミート作用素 A に属する単位の分解 $E(\lambda)$ を求める問題についてまえの節で論じたことは，特定の例にそくして見通しをつけるための定性的な概観以上にでなかった．われわれはまだ問題を系統的には研究していない．それを数学的に完全な形でおこなうことは，この本の枠からはみでている．われわれは，その一部について証明を与え，残りは指摘するにとどめなければならない．それらの諸関係の正確な知識は，量子力学の理解のために絶対的に必要というわけではないだけによけいにそうである[95]．

定理 *18* では，線型作用素の連続性は

(St.)　　$$\|Af\|\leqq C\cdot\|f\|$$

（C は任意だが固定されている）によって表現されることが示された．

定理 *18* によれば条件 **St.** には，なおいくつかの同等な形がある．すなわち，

(St₁.)　　$$|(Af,\ g)|\leqq C\cdot\|f\|\,\|g\|,$$

(St₂.)　　$$|(Af,\ f)|\leqq C\cdot\|f\|^2.$$

（後者はエルミートな A についてのみ）．

連続性に同等な条件 **St₁.** は Hilbert の有界性の概念を表わす．Hilbert は有界な（すなわち連続な）エルミート作用素に対して固有値問題を定式化し，それを解いたのである（注 70）をみよ）．しかし，それに立ちいるまえに，より広い概念をもう1つ導入しなければならない．

エルミート作用素 A はつぎの性質をもつとき閉じているといわれる：f_1, f_2, …… を点列とし，すべての Af_n が意味をもち，かつ

$$f_n\to f,\quad Af_n\to f^*$$

95）有界な作用素についての Hilbert の理論とならんで以下で，とりわけ考慮が払われる有界でないエルミート作用素の理論は，著者の注 78）にあげた論文でうちたてられた．それとは独立に，M. Stone も同様の結果に達している（Proc. Nat. Ac. 1929 および 1930）．

が成り立つならば，Af が意味をもち，しかもそれは $=f^*$ である．連続性をこれと密接に類似した方法で定義することができるということは注目されてよい．すなわち，すべての Af_n および Af が意味をもち，かつ $f_n \to f$ ならば，$Af_n \to Af$ がまた成り立つというのであった．2つの定義の違いは，閉じている方では Af_n の極限 f^* の存在も前提として要求され，そのうえではじめて f^* が Af に等しいと主張されたのに反して，連続性の方では f^* が存在することも帰結として主張される，ということである．

二，三の例をあげる：ふたたび $\mathfrak{R}_\infty$ を，有限な

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q)|^2 dq \qquad (-\infty < q < \infty)$$

をもつすべての $f(q)$ からなる空間とする．A は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(q)|^2 dq \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 |f(q)|^2 dq$$

が有限なようなすべての $f(q)$ に対して定義される作用素 $q\cdots\cdots$：A' は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(q)|^2 dq \quad \text{および} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{h}{2\pi i} f'(q) \right|^2 dq$$

が有限で，いたるところ微分可能なすべての函数に対して定義される作用素 $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}$；すでに知っているように両者ともエルミートである．A は閉じている．なぜなら：

$$f_n \to f, \quad Af_n \to f^*$$

すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(q) - f(q)|^2 dq \to 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q f_n(q) - f^*(q)|^2 dq \to 0$$

とすると，II.3 において **D.** の証明にさいしていわれたことによって，測度0の q の集合をのぞいていたるところ1つの極限に収斂する $f_1, f_2, \cdots\cdots$ の部分列 $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots\cdots$ が存在する：

$$f_{n_\nu}(q) \to g(q).$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(q) - f(q)|^2 dq = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q g(q) - f^*(q)|^2 dq = 0,$$

すなわち，測度0の集合をのぞいて

$$g(q) = f(q)$$

および同じく

$$qg(q)=f^*(q),$$

したがってまた

$$qf(q)=f^*(q),$$

すなわち，$f^*(q)$ と$qf(q)$ とは本質的には同じである．しかるに，仮定により $f^*(q)$ は $\mathfrak{R}_\infty$ に属するから $qf(q)$ もまたそうである．それゆえ $Af(q)$ は意味をもち，$qf(q)=f^*(q)$ に等しい．これに反して A' は閉じていない：例えば

$$f_n(q)=e^{-\sqrt{q^2+\frac{1}{n}}},\quad f(q)=e^{-|q|}$$

とおく．明らかに，Af_n はすべて意味をもつが，しかし Af は意味をもたない（fは $q=0$ において微分不可能）．それにもかかわらず

$$f^*(q)=-\operatorname{sgn}(q)e^{-|q|}$$

とおくかぎり（$q<,=,>0$ に対し $\operatorname{sgn}(q)=-1, 0, +1$）

$$f_n\to f,\quad Af_n\to f^*$$

であることは容易に験証できる．

そこでつぎのことを示す：連続性と反対に，閉じているという性質はエルミート作用素に対してつねにわずかの労力で，すなわち拡張によって付与することができる．つまり作用素が定義されているすべての $\mathfrak{R}_\infty$ の点ではそのままにしておいて，まだ定義されていない点では新たに定義するのである．

詳しくいうと，A を任意のエルミート作用素としたとき，作用素 $\widetilde{A}$ をつぎのように定義する：点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ があって Af_n がすべて意味をもつとき，f が f_n の極限で Af_n も極限 f^* をもつならば，$\widetilde{A}f$ の意味は

$$\widetilde{A}f=f^*$$

である．しかしこの定義は，それが一義的なとき，すなわち

$$f_n\to f,\ g_n\to f,\ Af_n\to f^*,\ Ag_n\to g^*$$

から

$$f^*=g^*$$

が導かれるときにしか許されない．実際，Ag が意味をもつならば

$$(f^*, g)=\lim(Af_n, g)=\lim(f_n, Ag)=(f, Ag),$$

$$(g^*, g)=\lim(Ag_n, g)=\lim(g_n, Ag)=(f, Ag).$$

したがって

$$(f^*, g)=(g^*, g)$$

である．しかるにこの g はいるところ密だから $f^*=g^*$——したがってわれわれの $\tilde{A}$ の定義は正しい．この $\tilde{A}$ は A の拡張である．すなわち，Af が意味をもつならば，$\tilde{A}f$ も意味をもち，それは Af に等しい：すべての

$$f_n=f \quad \text{および} \quad f^*=Af$$

とおけば十分である．A が線型でエルミートであることから，$\tilde{A}$ もそうであると結論される（極限移行による）．最後に，$\tilde{A}$ は閉じている．なぜなら；すべての $\tilde{A}f_n$ が意味をもち，

$$f_n \to f, \quad \tilde{A}f_n \to f^*$$

であるとすると，$Af_{n,m}$ が意味をもち

$$f_{n,m} \to f_n, \quad Af_{n,m} \to f_n^*$$

であるような点列 $f_{n,1}, f_{n,2}, \cdots\cdots$ が存在し，

$$\tilde{A}f_n=f_n^*.$$

各 n に対して，$m \geqq N_n$ ならば

$$\|f_{n,m}-f_n\| \leqq \frac{1}{n}, \quad \|Af_{n,m}-f_n^*\| \leqq \frac{1}{n}$$

となるような1つの N_n が存在するから，

$$f_{n,N_n}-f_n \to 0, \quad Af_{n,N_n}-\tilde{A}f_n \to 0,$$

ゆえに

$$f_{n,N_n}-f \to 0, \quad Af_{n,N_n}-f^* \to 0.$$

これから，定義によって

$$\tilde{A}f=f^*.$$

（不連続な作用素は拡張によっては，けっして連続にできないことに注意.）

作用素 B が作用素 A の拡張であるとき，すなわち，Af が意味をもつかぎり Bf も意味をもち，かつ Af に等しいとき，$B \succ A$ あるいは $A \prec B$ と書く．われわれがいま証明したのは $A \prec \tilde{A}$, $\tilde{A}$ はエルミートで閉じている，ということである．$A \prec B$ であるようなすべての B に対して $\tilde{A} \prec B$ であることはもとより明らかである．したがって，$\tilde{A}$ は A の最小の拡張である（ゆえに $\tilde{\tilde{A}}=\tilde{A}$）.

A と $\tilde{A}$ とのあいだの緊密な関係からすれば，A をあらゆる場合に $\tilde{A}$ でおきかえるのがよいようである．まず $\tilde{A}$ は A の定義域をその合理的な周辺にまで拡張している，あるいは，A の定義域は $\tilde{A}$ のそれに対して局限されすぎているからである．このおきかえをすれば，以下ではすべてのエルミート作

用素を閉じていると，みなすことができる.

なお連続なエルミート作用素 A を考察しよう．この場合，それが閉じていることと，その定義域が閉じていることとは同等である．ところで連続性を特徴づける条件

$$\|Af\| \leqq C\cdot\|f\|$$

は明らかに $\widetilde{A}$ に対しても成り立つから，$\widetilde{A}$ もまた連続である——そしてそのとき $\widetilde{A}$ の定義域は閉じており，またそれはいたるところ密でなければならないから，$\mathfrak{R}_\infty$ に等しい．すなわち，$\widetilde{A}$，したがってすべての閉じた連続な作用素はいたるところで意味をもつ．その逆もまた成り立つ：閉じた作用素がいたるところで意味をもてば，それは連続である（これは Toeplitz の定理[96]であるが，その証明には，ここでたちいることができない).

Hilbert の結果はつぎのように述べられる：すべての連続なエルミート作用素には1個の，しかもただ1個の単位の分解が属する（さきの注 70）をみよ).

連続な作用素はつねに意味をもつから，

$$\int \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2$$

は有限でなければならない：そのうえそれは $\|Af\|^2$ に等しく，したがって ***St.*** により $\leqq C^2\cdot\|f\|^2$ であるから，

$$0 \geqq \|Af\|^2 - C^2\cdot\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 - C^2\int_{-\infty}^{\infty} d\|E(\lambda)f\|^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda^2 - C^2) d\|E(\lambda)f\|^2$$

をうる．いま

$$f = E(-C-\varepsilon)g$$

とおくと，

$$E(\lambda)f = E(\mathrm{Min}(\lambda,\ -C-\varepsilon))g.$$

したがって

$$\lambda \geqq -C-\varepsilon$$

に対して，これは定数であるから，$\int_{-\infty}^{-C-\varepsilon}$ だけを考えればよい．そこでは

$$E(\lambda)f = E(\lambda)g,$$

かつ $\lambda^2 - C^2 \geqq (C+\varepsilon)^2 - C^2 > 2C\varepsilon$ であるから

---

96) Math. Ann. Bd. 69 (1911)

$$0 \geqq 2C\varepsilon\int_{-\infty}^{-C-\varepsilon} d\|E(\lambda)g\|^2 = 2C\varepsilon\|E(-C-\varepsilon)g\|^2,$$

$$\|E(-C-\varepsilon)g\|^2 \leqq 0, \quad E(-C-\varepsilon)g = 0.$$

同様に

$$f = g - E(C+\varepsilon)g$$

に対して

$$g - E(C+\varepsilon)g = 0$$

が証明される．それゆえ，すべての $\varepsilon>0$ に対して

$$E(-C-\varepsilon)=0, \quad E(C+\varepsilon)=1$$

すなわち，$\lambda<-C$ に対して $E(\lambda)=0$, $\lambda>C$ に対して $=1$ である（$\bar{S}_2$. のために，あとの式は $\lambda=C$ に対しても成り立つ）．したがって $E(\lambda)$ は $-C \leqq \lambda \leqq C$ のなかでのみ変化するのである．

逆に，このことから A の連続性が導かれる：

$$\|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 = \int_{-C}^{C}\lambda^2 d\|E(\lambda)f\|^2 \leqq C^2\cdot\int_{-C}^{C} d\|Ef\|^2$$

$$= C^2\int_{-\infty}^{\infty} d\|E(\lambda)f\|^2 = C^2\cdot\|f\|^2, \quad \|Af\| \leqq C\cdot\|f\|.$$

したがって，連続な A はλの有限区間でだけ変化する単位の分解によってちょうど尽くされることがわかる．しかし残りの不連続なエルミート作用素についてはどうであろうか？ λの任意に大きな部分において変化するようなあらゆる単位の分解がたしかに利用できるが，これによって不連続なエルミート作用素は尽くされるであろうか？

この作用素がいたるところでは意味をもたないことがありうる，という事情をまず正しく考慮しなければならない．

あるエルミート作用素が，当然定義できると思われたヒルベルト空間の点において定義されないということはまったく考えられることである．例えばわれわれの作用素 $A'=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ は $f(q)=e^{-|q|}$ に対して定義されなかった．そしてわれわれは $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ がかかる函数を解析函数（$-\infty<q<\infty$ における，q は実数）に限ることもできたであろう[97]．等々．しかし，定義域に対してはい

97) $-\infty<q<+\infty$ において解析的な $f(q)$（有限な $\int_{-\infty}^{\infty}|f(q)|^2dq$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f'(q)|^2dq$ …… をもつ）は $\mathfrak{R}_\infty$ のなかにいたるところ密に存在する．II. 3., **D** により

たるところ密であることが要求されるために，それをあまり勝手気ままに制限することは許されない．さらに，われわれは閉じた作用素に限ることができる．しかし，これもほんとうに十分ではない．なぜかといえば，例えば区間 $0\leqq q\leqq 1$ における作用素 $A'=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}$ をとってみよう．すると $f(q)$ はいたるところ微分可能であって

$$\int_0^1|f(q)|^2dq,\quad \int_0^1|f'(q)|^2dq$$

は有限とされる．A' がエルミートであるためには，なお境界条件

$$f(0):\ f(1)=e^{-i\alpha}\quad(0\leqq\alpha<2\pi)$$

を課さなければならない．このような $f(q)$ の領域を $\mathfrak{A}_\alpha$, A' 自身を A_α' とよぼう．さらに境界条件

$$f(1)=f(0)=0$$

を考え，そのときの $f(q)$ の領域を $\mathfrak{A}^0$, A' を A'^0 とよぼう．すべての $\widetilde{A}_\alpha'$ は $\widetilde{A}'^0$ の拡張であるから（したがってそれはエルミート，その定義域はいたるところ密[98]），閉じた $\widetilde{A}_\alpha'$ も $\widetilde{A}'^0$ の拡張である．すべての $\widetilde{A}_\alpha'$ はたがいに，また $\widetilde{A}'^0$ とも異なる．なぜなら，明らかにユニタリーな操作

$$f(q)\to e^{i\beta q}f(q)$$

は，A' を $A'+\frac{h\beta}{2\pi}\mathbf{1}$ へ，また $\mathfrak{A}_\alpha$ を $\mathfrak{A}_{\alpha+\beta}$ へ，$\mathfrak{A}^0$ を $\mathfrak{A}^0$ へ移し，したがって，A_α' は $A_{\alpha-\beta}'+\frac{h\beta}{2\pi}\mathbf{1}$ へ，A'^0 は $A'^0+\frac{h\beta}{2\pi}\mathbf{1}$ へ，それゆえ $\widetilde{A}_\alpha'$ は $\widetilde{A}'_{\alpha-\beta}+\frac{h\beta}{2\pi}\mathbf{1}$ へ，$\widetilde{A}^{0\prime}$ は $\widetilde{A}'^0+\frac{h\beta}{2\pi}\mathbf{1}$ へ移される．したがって，

$$\widetilde{A}_\alpha'=\widetilde{A}'^0$$

$$f_{a,b}(q)=\begin{cases}1, & a<q<b \text{ に対して}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

の1次結合はいたるところ密に存在する．したがって，上述の $f(q)$ によって，これを任意に近似すれば十分である．実際，例えば

$$f_{a,b}^{(\varepsilon)}(q)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{hyptan}\frac{(x-a)(x-b)}{\varepsilon}=\frac{1}{e^{2\frac{(x-a)(x-b)}{\varepsilon}}+1}$$

はそのような種類のものであって，$\varepsilon\to+0$ に対して $f_{a,b}(q)$ へ収斂する．

98）ここでもやはり，$f_{a,b}(q)$, $0\leqq a<b\leqq 1$ を $\mathfrak{A}^0$ に属する函数で近似すれば十分である．そのような函数として，例えば

$$f_{a,b}^{(\varepsilon)}(q)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{hyptan}\left(\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{(x-a-\varepsilon)(x-b+\varepsilon)}{x(1-x)}\right)$$

を $\varepsilon\to+0$ として利用することができる．

ならば

$$\widetilde{A}_{\alpha-\beta}{}'=A'^{0}$$

がでてくるであろう．すなわち，すべての $\widetilde{A}_\gamma{}'$ はたがいに等しいことになろう．ゆえに

$$\alpha \neq \gamma \text{ に対して } \widetilde{A}_\alpha{}' \neq \widetilde{A}_\gamma{}'$$

を示せば十分である．これは，$A_\alpha{}'$, $A_\gamma{}'$ が共通のエルミートな拡張を有しないとき，したがって，A' が $\mathfrak{A}_\alpha$ と $\mathfrak{A}_\gamma$ とを合わせたなかではエルミートでないときに，みたされる．$e^{i\alpha q}$ は $\mathfrak{A}_\alpha$ に，$e^{i\gamma q}$ は $\mathfrak{A}_\gamma$ に属し，

$$(A'e^{i\alpha q},\ e^{i\gamma q})-(e^{i\alpha q},\ A'e^{i\gamma q})=i\alpha\int_0^1 e^{i(\alpha-\gamma)q}dq-i\gamma\int_0^1 e^{i(\alpha-\gamma)}dq$$

$$=\int_0^1 e^{i(\alpha-\gamma)q}i(\alpha-\gamma)dq=e^{i(\alpha-\gamma)}-1\neq 0$$

であるから，たしかにそうなっている．それゆえ，閉じたエルミート作用素 $\widetilde{A}'^{0}$ に対してはその真の(すなわち，それとは異なる)閉じたエルミートな拡張 $\widetilde{A}_\alpha{}'$ が存在するのであるから，$\widetilde{A}'^{0}$ はあまりにせまい領域で定義されている．そして，すべての $\widetilde{A}_\alpha{}'$ が利用でき，しかもそれらは固有値問題のそれぞれ別の解(つねに純粋の点スペクトル，しかしいずれも α に依存する：それは集合 $h\left(\frac{\alpha}{2\pi}+k\right)$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots$ である）を与えるから，このさいの拡張は無限に多意的である．それに対して，作用素 $\widetilde{A}'^{0}$ 自身については，総じて固有値問題のどんな合理的な解も期待できない．実際この節のさきのほうで，ある単位の分解に属する（すなわち，それに対する固有値問題がとける）エルミート作用素はけっして真の拡張をもたないことが示されるであろう．真の拡張をもたない作用素，したがっておよそ合理的に，すなわち，エルミート性をやぶらないで定義できるすべての点ですでに定義されている作用素を，われわれは極大であるという．したがって，われわれは極大な作用素にのみ単位の分解が属することを知ったわけである．

他方，つぎの定理が成り立つ：すべてのエルミート作用素は極大なエルミート作用素にまで拡張することができる（ところが，極大ではないが閉じた作用素は無限に異なる方法で拡張可能である．すなわち拡張の手続きの唯一の一意的な段階は“閉じさせること”$A\to\widetilde{A}$ である．さきの注 95）をみよ）．したがって，われわれの期待できる最も好都合な問題の解はこうであろう：各極大なエルミート作用素に１つの，そしてただ１つの単位の分解が属する（すべて

の閉じた連続な作用素は $\mathfrak{R}_\infty$ のいたるところで意味をもち，したがって極大である）.

したがって，つぎのような問題は問う価値がある．すなわち，極大なエルミート作用素にはつねに1つの単位の分解が属するであろうか? また，ときとして同一の作用素に多くの単位の分解が属することがあるだろうか?

はじめに結果をいうと，与えられた極大なエルミート作用素に属する単位の分解はぜんぜんないか，ちょうど1つだけあり，うえの最初の予想があたっている．——すなわち，固有値問題はたしかに一意的であるが，ときとして解けない．しかしながら，このあとの場合はある意味では例外とみなされるべきである．これらの結果を導く方法をあらい筆づかいでスケッチしてみよう．

ある有理函数 $f(\lambda)$ を（有限次元の，ユニタリーに対角線型に変換することのできる）行列 A に適用すれば，固有ベクトルはそのまま残り，固有値 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ は $f(\lambda_1), \cdots\cdots, f(\lambda_n)$ に変る[99]．いま $f(\lambda)$ が実軸（複素平面における）を単位円の円周に写像するならば，すべて実の固有値をもつ行列は絶対値1の固有値をもつ行列へ，すなわち，エルミート行列がユニタリー行列へ移される[100]．たとえば

$$f(\lambda)=\frac{\lambda-i}{\lambda+i}$$

はこの性質をもっているが，これに対応する変換

$$U=\frac{A-i1}{A+i1},\quad A=-i\frac{U+1}{U-1}$$

はケーリ変換とよばれる．ところでわれわれは，この変換を $\mathfrak{R}_\infty$ でのエルミート作用素について調べよう．すなわち，作用素 U をつぎのように定義する：

99）函数 $f(\lambda)$ は多項式で近似されると考えることができるから，多項式——したがってその素材である，べき乗 $f(\lambda)=\lambda^s$ $(s=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ を考察すれば十分である．ユニタリー変換によっては大切な点は変らないから，Aは対角行列とみなしてよい．対角要素は固有値であるから，それは $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ である．したがって A^s がまた対角型であり，対角要素 $\lambda_1{}^s, \cdots\cdots, \lambda_n{}^s$ をもつことを示せばよい．しかしこれは自明である．

100）これらの性質がエルミートあるいはユニタリーな特徴を表わしていることは，やはり対角行列だけについて証明すればよい．対角要素 $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ をもつ対角行列Aに対して，対角要素 $\bar{\lambda}_1, \cdots\cdots, \bar{\lambda}_n$ をもつ対角行列 A^* は転置共役の関係にある．したがって，$A=A^*$ は $\lambda_1=\bar{\lambda}_1, \cdots\cdots, \lambda_n=\bar{\lambda}_n$，すなわち，$\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ が実数であることを意味する．また $AA^*=A^*A=1$ は，$\lambda_1\bar{\lambda}_1=1, \cdots\cdots, \lambda_n\bar{\lambda}_n=1$，すなわち，$|\lambda_1|=\cdots\cdots=|\lambda_n|=1$ を意味する．

U は

$$f=(A+i1)\varphi=A\varphi+i\varphi$$

であるとき，そしてそのときにだけ意味をもち，しかもそのとき

$$Uf=(A-i1)\varphi=A\varphi-i\varphi$$

である．われわれが望むのは，この定義がすべての f に対して一意的に Uf を与え，かつUがユニタリーとなることである．$\mathfrak{R}_n$ においては対角型への変換可能性，すなわち固有値問題が解けて純粋な点スペクトルをもつことが前提されているから，そこでの証明は当然規準にはならない．しかし，うえの望みはみたされているので，Aの固有値問題をつぎのように解くことができる．

Uに対しては固有値問題はつぎの形に解ける．

以下の条件をみたす射影作用素 $E(\sigma)$ の集り $(0\leqq\sigma\leqq1)$ がただ1つ存在する：

$\overline{\overline{S}}_1$.
$$E(0)=0,\quad E(1)=1$$
$$\sigma\to\sigma_0,\ \sigma\geqq\sigma_0 \text{ に対して } E(\sigma)f\to E(\sigma_0)f$$

が成り立つ．

$\overline{\overline{S}}_2$. $\sigma'\leqq\sigma''$ から

$$E(\sigma')\leqq E(\sigma'')$$

がでる．

$\overline{\overline{S}}_3$.
$$(Uf,\ g)=\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}d(E(\sigma)f,\ g)$$

がつねに成り立つ．

(Uf はつねに意味をもち，右辺の積分はつねに絶対収斂する[101])．

これの証明は，Hilbert の理論の枠内でその手段を使っておこなわれるが，それが可能なのは，ユニタリー作用素Uがつねに連続であるからである（さき

101) これらの事実の証明については，さきの注 78) にあげた著者の論文，さらに A. Wintner: Math. Z. Bd. **30** (1929) をみよ．$f(\sigma)$ を有界として，すべての積分 $\int_0^1 f(\sigma)d(E(\sigma)f,\ g)$ が収斂することはつぎのようにしてわかる．$\mathrm{Re}(E(\sigma)f,\ g)$ において $f,\ g$ を $if,\ g$ でおきかえれば $\mathrm{Im}(E(\sigma)f,\ g)$ となるから，前者を考察すれば十分である．

$$\mathrm{Re}(E(\sigma)f,\ g)=\left(E(\sigma)\frac{f+g}{2},\ \frac{f+g}{2}\right)-\left(E(\sigma)\frac{f-g}{2},\ \frac{f-g}{2}\right)$$

によって $(E(\sigma)f,\ f)$ を考察するだけでよい．$\int_0^1 f(\sigma)d(E(\sigma)f,\ f)$ において被積分函数は有界，d 記号のうしろの σ の函数は単調だから，うえの主張は明らかである．

の注 70), 101) をみよ). エルミート作用素に対する定式 $\overline{\overline{S}}_1.—\overline{\overline{S}}_3.$ との類似はただちに目にはいる. 唯一の違いは $>-\infty$, $<+\infty$ の範囲にある実の被積分函数 λ の代りに, ここでは複素数の被積分函数 $e^{2\pi i\sigma}$ が単位円の周上を動き(すでに $\Re_n$ において, エルミートとユニタリーの関係は, 実軸・単位円周の関係に密接に類似していた. 注 100) をみよ), かつ $\overline{\overline{S}}_3.$ に述べられている作用素の定義域についての言及は, ユニタリー作用素はいたるところで意味をもつので, ここでは余分である.

$\overline{\overline{S}}_1.$ のために $\sigma\to0$ (もともと $\sigma\geqq0$!) に対しては

$$E(\sigma)f\to E(0)f=0.$$

他方 $\sigma\to1$ ($\sigma\leqq1$ だから!) に対しては

$$E(\sigma)f\to E(1)f=f$$

とならなくてもよい. 実際こうはならないときには, $E(\sigma)$ はまさしく $\sigma=1$ で不連続である. しかし $\sigma\to1$, $\sigma<1$ に対して

$$E(\sigma)f\to E'f$$

となるような射影作用素 E' が存在する (II.4. の定理 *17.* また注 79) をみよ) から, それは,

$$E'\neq E(1)=1$$

を, すなわち, $E'f=0$ が $f\neq0$ という解をもつことを意味する.

$$E(\sigma)\leqq E'$$

のために,

$$E'f=0$$

からすべてのに $\sigma<1$ 対して

$$E(\sigma)f=0$$

がでてくる. 逆に, 定義によりそれは後者の帰結である. ところで, すべての $E(\sigma)f=0$ ならば ($\sigma<1$), II.8. のはじめにおけるように, すべての g に対して

$$(Uf,\ g)=(f,\ g),$$

したがって

$$Uf=f$$

であることがわかる. 逆に $Uf=f$ であれば,

$$\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}d(E(\sigma)f,\ f)=(Uf,\ f)=(f,\ f),$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}d(E(\sigma)f,\ f)$$

$$=(f,\ f)\int_0^1(1-\cos(2\pi\sigma))d(E(\sigma)f,\ f)=0,$$

$$\int_0^1(1-\cos(2\pi\sigma))d(\|E(\sigma)f\|^2)=0.$$

これから，II.8. のはじめにおけるようにして，すべての $\sigma<1$ (かつ $\geqq 0$，しかし $\sigma=0$ に対してはどちらにせよ成り立つことである) に対して

$$E(\sigma)f=0$$

が結論される．したがって，$\sigma=1$ における $E(\sigma)$ の不連続性は

$$Uf=f$$

が $f\neq 0$ によって解けることを意味する．

さて，ケーリ変換によってえたわれわれのUでは

$$\varphi=Af+if,\quad U\varphi=Af-if$$

であるから，

$$U\varphi=\varphi$$

から

$$f=0,\quad \varphi=0$$

がえられる．ゆえにこのようなUでは $\sigma\to 1$ に対しても

$$E(\sigma)f\to f$$

が成り立たなければならない．したがって，

$$\lambda=-i\frac{e^{2\pi i\sigma}+1}{e^{2\pi i\sigma}-1}=-\cot\pi\sigma,\quad \sigma=-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\lambda$$

という写像によって（これは区間 $0<\sigma<1$ と $-\infty<\lambda<+\infty$ とをたがいに 1 対 1 に，かつ単調に写像する)，$E(\sigma)$ から $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$. の意味での単位の分解 $F(\lambda)$ を 1 つ生成することができる：

$$(C.)\qquad F(\lambda)=E\left(-\frac{1}{\pi}\cot^{-1}\lambda\right),\quad E=F(-\cot\pi\sigma).$$

そこで，$F(\lambda)$ は，$E(\sigma)$ がUに対する $\overline{\overline{S}}_3$. をみたすとき，そしてそのときにだけ，$A$に対する $\overline{\overline{S}}_3$. をみたすということを示そう．これによって，(ときとして不連続な!) エルミート作用素Aの固有値問題が解けるかどうかの問題と．解の一意性の問題とは，ユニタリー作用素 U に対する同様の問題に帰着される．しかるに後者は，すでに述べたように，すこぶる好都合な形に解決される．

したがって，Aをエルミート作用素，Uをそのケーリ変換とする．まず第1に，Uがユニタリーで，したがってこれに対して $\overline{\overline{S}}_1$, $\overline{\overline{S}}_2$. さらに $\overline{\overline{S}}_3$. をみたす $E(\sigma)$ が存在するという場合を論じよう．($C.$) によって $F(\lambda)$ をつくると，$\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$. はみたされる．Af が意味をもつならば，

$$Af+if=\varphi,\quad Af-if=U\varphi.$$

したがって

$$f=\frac{\varphi-U\varphi}{2i},\quad Af=\frac{\varphi+U\varphi}{2}$$

である．一部は記号的な計算によって[102]，

$$f=\frac{1}{2i}(\varphi-U\varphi)=\frac{1}{2i}\left(\varphi-\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}dE(\sigma)\varphi\right)=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma}}{2i}dE(\sigma)\varphi,$$

$$E(\sigma)f=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d(E(\sigma)E(\sigma')\varphi)=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d(E(\mathrm{Min}(\sigma,\ \sigma'))\varphi)$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}dE(\sigma')\varphi,$$

$$\|E(\sigma)f\|^2=(E(\sigma)f,\ f)=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d(E(\sigma')\varphi,\ f)$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d\overline{(E(\sigma')f,\ \varphi)}$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d\left(\int_0^{\sigma'}\frac{1-e^{-2\pi i\sigma''}}{-2i}d\overline{(E(\sigma'')\varphi,\ \varphi)}\right)$$

$$=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}\cdot\frac{1-e^{-2\pi i\sigma'}}{-2i}\cdot d\overline{(E(\sigma')\varphi,\ \varphi)}$$

$$=\int_0^\sigma\frac{(1-e^{2\pi i\sigma'})(1-e^{-2\pi i\sigma'})}{4}d(\|E(\sigma')\varphi\|^2)$$

$$=\int_0^\sigma\sin^2(\pi\sigma')d(\|E(\sigma')\varphi\|^2).$$

したがって $\overline{S}_3$. の積分は

102）　つまりわれわれは，スチェルチェス積分を数でなく $\mathfrak{R}_\infty$ の要素に適用するのである．すべての関係はつぎのように理解しなければならない．それらの関係が，$\mathfrak{R}_\infty$ に属する固定した g を選び，積分のなかに現れる $\mathfrak{R}_\infty$ の要素をすべてそれと g との内積でおきかえたときに，しかもすべての g に対して成り立つ．——II. 7 の作用素のスチェルチェス積分と比べると，これは半記号的な操作ということができる．あそこでは，$\mathfrak{R}_\infty$ の g を1つでなく，2つの f と g を $\mathfrak{R}_\infty$ から任意に選んで，(……, g) でなく (……f, g) を (……の部分に作用素がくる) つくらなければならなかった．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|F(\lambda)f\|^2=\int_0^1\cot^2(\pi\sigma)d\|E(\sigma)f\|^2$$

$$=\int_0^1\cot^2(\pi\sigma)d\left(\int_0^\sigma\sin^2(\pi\sigma')d\|E(\sigma')\varphi\|^2\right)$$

$$=\int_0^1\cot^2(\pi\sigma)\cdot\sin^2(\pi\sigma)d\|E(\sigma)\varphi\|^2$$

$$=\int_0^1\cos^2(\pi\sigma)d\|E(\sigma)\varphi\|^2.$$

しかるにこれは

$$\int_0^1 d\|E(\sigma)\varphi\|^2=\|\varphi\|^2$$

によって無条件におさえられるから，有限である．さらにそのとき

$$Af=\frac{1}{2}(\varphi+U\varphi)=\frac{1}{2}\left(\varphi+\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}dE(\sigma)\varphi\right)=\int_0^1\frac{1+e^{2\pi i\sigma}}{2}dE(\sigma)\varphi$$

$$=\int_0^1 -i\frac{e^{2\pi i\sigma}+1}{e^{2\pi i\sigma}-1}\cdot\frac{1-e^{2\pi i\sigma}}{2i}dE(\sigma)\varphi$$

$$=\int_0^1 -\cot(\pi\sigma)d\left(\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}dE(\sigma')\varphi\right)$$

$$=\int_0^1 -\cot(\pi\sigma)dE(\sigma)f=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF(\lambda)f.$$

すなわち，$\overline{S}_3.$ の目的とする関係も成り立つ．したがって，いずれにせよ A は，$\overline{S}_3.$ によって $F(\lambda)$ に属するところの作用素の拡張であるが，この作用素は（あとに示すように）極大であるから，A はこれに等しくなければならない[103]．

そこで次に逆を調べよう．$F(\lambda)$ は $\overline{\overline{S}}_1.$—$\overline{\overline{S}}_3.$ によって A に属する．U はどうであろうか？ いま $E(\sigma)$ を（$C.$）によって定義すると，それは $\overline{\overline{S}}_1$, $\overline{\overline{S}}_2.$ を

103) ここで，与えられた単位の分解の各々に対してそのような作用素が現実に存在することが暗々に仮定されている．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d\|F(\lambda)f\|^2$$

が有限なとき，すべての g に対して

$$(f^*, g)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(F(\lambda)f, g)$$

となるような f^* を見出すことができ，かつこのような f はいたるところ密に存在するということである（このように定義された作用素のエルミート性は $\overline{S}_3.$ から導かれる：最後の式において f と g とを交換し，複素共役をとればよい）．この2つの主張はさきの注 78) によって証明されている．

みたす．φは任意として，つぎのようにおく（やはり記号的）：

$$f=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda+i}dF(\lambda)\varphi=\int_0^1\frac{1}{-\cot(\pi\sigma)+i}dE(\sigma)\varphi$$
$$=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma}}{2i}dE(\sigma)\varphi$$

（$\frac{1}{\lambda+i}$ あるいは $\frac{1-e^{2\pi i\sigma}}{2i}$ は有界だから，すべて収斂する）．すると，

$$F(\lambda)f=E(\sigma)f=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}d(E(\sigma)E(\sigma')\varphi)$$
$$=\int_0^1\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}dE(\mathrm{Min}(\sigma,\ \sigma'))\varphi=\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}dE(\sigma')\varphi,$$

$$Af=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dF(\lambda)f=\int_0^1-\cot(\pi\sigma)dE(\sigma)f$$
$$=\int_0^1-i\frac{e^{2\pi i\sigma}+1}{e^{2\pi i\sigma}-1}d\left(\int_0^\sigma\frac{1-e^{2\pi i\sigma'}}{2i}dE(\sigma')\varphi\right)$$
$$=\int_0^1-i\frac{e^{2\pi i\sigma}+1}{e^{2\pi i\sigma}-1}\cdot\frac{1-e^{2\pi i\sigma}}{2i}dE(\sigma)\varphi=\int_0^1\frac{1+e^{2\pi i\sigma}}{2}dE(\sigma)\varphi.$$

したがって

$$Af+if=\int_0^1 dE(\sigma)\varphi=\varphi,$$

$$Af-if=\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}dE(\sigma)\varphi.$$

ゆえに $U\varphi$ は意味をもち，$\int_0^1 e^{2\pi i\sigma}dE(\sigma)\varphi$ に等しい．φは任意だからUはいたるところで意味をもつ．任意のψとの内積をつくり，複素共役をとれば，なお $U^*\psi$ が $\int_0^1 e^{-2\pi i\sigma}dE(\sigma)\psi$ に等しいことがわかる．すると II.8. の最後の計算は $UU^*=U^*U=1$ を示している．すなわち，U はユニタリーで $E(\sigma)$ に属する．

したがって，Aの固有値問題が解けるということは，それのケーリ変換Uのユニタリー性と同等である．そのとき解の一意性は確立されている．それゆえ，なお残っているのは，つねにUを作ることができるかどうか，そしてそれはいつユニタリーとなるかを判定することだけである．これらの問題を解決するために，ふたたび閉じたエルミート作用素Aを出発点にとる．

Uはつぎのように定義された．$\varphi=Af+if$ のとき，そしてそのときにだけ $U\varphi$ が意味をもち，それは $Af-if$ に等しい．しかし第1に，この定義がそもそも許されるものであること，つまり，1つのφに対して1つより多くのf

が存在することはできないことを示さなければならない．すなわち，$Af+if=Ag+ig$ から $f=g$，あるいは，（A の線型性のために）$Af+if=0$ から $f=0$ がでてこなければならない．

$$\begin{aligned}\|Af\pm if\|^2&=(Af\pm if,\ Af\pm if)\\&=(Af,\ Af)\pm(Af,\ if)\pm(if,\ Af)+(if,\ if)\\&=\|Af\|^2\mp i(Af,\ f)\pm i(Af,\ f)+\|f\|^2\\&=\|Af\|^2+\|f\|^2\end{aligned}$$

であるから，$Af+if=0$ の結果として

$$\|f\|^2\leqq\|Af+if\|^2=0,\quad f=0$$

をえ，これによってわれわれの定義の仕方は正当化される．第2に

$$\|Af+if\|=\|Af-if\|^2,\ \text{すなわち}\ \|U\varphi\|=\|\varphi\|$$

である．したがって U は，それが定義されるかぎり連続である．さらにつぎのことがわかる．$\mathfrak{E}$ を U の定義域（すなわち，すべての $Af+if$ の集合），$\mathfrak{F}$ を U の値域（すなわち，すべての $U\varphi$，したがってすべての $Af-if$ の集合）とする．A と U とが線型だから，$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ は線型多様体であるが，それはまた閉じている．すなわち，φ を $\mathfrak{E}$ あるいは $\mathfrak{F}$ の1つの集積点とすれば，$\varphi_n\to\varphi$ となるような $\mathfrak{E}$ または $\mathfrak{F}$ に属する点列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が存在する．したがって

$$\varphi_n=Af_n\pm if_n.$$

φ_n は収斂するから，それは Cauchy の収斂条件をみたし（II. 1. の $\boldsymbol{D}$ をみよ），

$$\|f_m-f_n\|\leqq\|A(f_m-f_n)\pm i(f_m-f_n)\|=\|\varphi_m-\varphi_n\|$$

だから，f_n がまずこの条件をみたし，また，

$$\begin{aligned}\|Af_m-Af_n\|=\|A(f_m-f_n)\|&\leqq\|A(f_m-f_n)\pm i(f_m-f_n)\|\\&=\|\varphi_m-\varphi_n\|\end{aligned}$$

によって Af_m もまたみたす．ゆえに，$f_1, f_2, \cdots\cdots$ および $Af_1, Af_2, \cdots\cdots$ がまた収斂する（II. 1. の $\boldsymbol{D}$ による）:

$$f_n\to f,\quad Af_n\to f^*.$$

A は閉じているから，Af は意味をもち，かつそれは f^* に等しい．ゆえに

$$\varphi_n=Af_n\pm if_n\to f^*\pm if=Af\pm if,\quad \varphi_n\to\varphi$$

をえる．ゆえに $\varphi=Af\pm if$，すなわち，φ もまた $\mathfrak{E}$ あるいは $\mathfrak{F}$ に属する．

したがって，U は閉じた線型多様体 $\mathfrak{E}$ において定義され，これを閉じた線

型多様体 $\mathfrak{F}$ に写像する．U は線型であり，

$$\|Uf-Ug\|=\|U(f-g)\|=\|f-g\|$$

によって，すべての距離は不変に保たれる．われわれの言葉によれば，それは長さを変えない．それゆえ，$f \neq g$ から $Uf \neq Ug$ がえられる．すなわち，写像は $1:1$ である．また

$$(f, g)=(Uf, Ug)$$

が成り立つ．これは，II.5. のユニタリー作用素におけるのとまったく同様に証明される．ゆえに，U はまたすべての内積を不変にする．しかし U がユニタリーなのは，いうまでもなく，$\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ のとき，そしてそのときのみである．

いま A, B は2つの閉じたエルミート作用素，U, V はそれらのケーリ変換，U と V とについての上述の集合をそれぞれ $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ および $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ とすれば，ただちにつぎのことがわかる：BがAの真の拡張であればVもまた U の真の拡張であり，したがって，$\mathfrak{E}$ は $\mathfrak{G}$ の真の部分，$\mathfrak{F}$ は $\mathfrak{H}$ の真の部分である．それゆえ，$\mathfrak{E} \neq \mathfrak{R}_\infty$，$\mathfrak{F} \neq \mathfrak{R}_\infty$ である．そうすると U はユニタリーでなく，Aの固有値問題は解けない．こうして，たびたび引用した定理が証明されたわけである：

> Aの固有値問題が解けるならばAの真の拡張は存在しない．すなわちAは極大である．

さてふたたび閉じたエルミート作用素Aとそれに対する $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, U$ にかえろう．Af が意味をもてば，$Af+if=\varphi$ に対して，$U\varphi$ は意味をもち，しかも $Af-if=U\varphi$，したがって

$$f=\frac{1}{2i}(\varphi-U\varphi),\quad Af=\frac{1}{2}(\varphi+U\varphi)$$

となる．すなわち，$\psi=\dfrac{\varphi}{2i}$ とおけば

$$f=\psi-U\psi,\quad Af=i(\psi+U\psi).$$

逆に，$f=\psi-U\psi$ に対して Af は確かに意味をもつ：なぜなら，$U\psi$ が意味をもつから，

$$\psi=Af'+if' \ (A'f \text{ は意味をもつ!}),\quad U\psi=Af'-if',$$

したがって，$f=\psi-U\psi=2if'$ となるからである．ゆえに A の定義域はすべての $\psi-U\psi$ の集合であり，$f=\psi-U\psi$ に対しては，

$$Af=i(\psi+U\psi)$$

である．こうしてAがまた U(そして$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$) によって一意的に決定される．同時に，$\psi-U\psi$ はいたるところ密に存在しなければならない (A の定義域として) ことがわかる．

こんどは逆に，2つの閉じた線型多様体 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$，および，$\mathfrak{E}$ の $\mathfrak{F}$ への線型な長さを変えない写像 U を出発点にとろう．そのケーリ変換がこの U であるようなエルミートなAが存在するであろうか？ そのためには，いずれにせよ$\psi-U\psi$ がいたるところ密に存在しなければならないから，これを仮定する．すると問題のAはいまさき述べたことによって一意的に確定される．そこで問題になるのは，この定義は可能かどうか，このAが実際エルミートであるかどうか，そして，現実に Uがそのケーリ変換であるかどうか，ということだけである．第1は，

$$f=\varphi-U\varphi$$

においてfがφを (これがとにかく存在するとき) 一意的に決定するとき，すなわち，

$$\varphi-U\varphi=\psi-U\psi$$

から $\varphi=\psi$ がえられるとき，あるいは

$$\varphi-U\varphi=0$$

から $\varphi=0$ がえられるときに確認される．実際

$$\varphi-U\varphi=0$$

とすると，

$$g=\psi-U\psi$$

から

$$\begin{aligned}(\varphi, g)&=(\varphi, \psi)-(\varphi, U\psi)=(U\varphi, U\psi)-(\varphi, U\psi)\\&=(U\varphi-\varphi, U\psi)=0\end{aligned}$$

がえられ，このgはいたるところ密に存在するから $\varphi=0$ である．

第2については，$(Af, g)=(f, Ag)$，すなわち，(Af, g) においてfとgとを交換すればその複素共役になる，ということを証明しなければならない．

$$f=\varphi-U\varphi,\quad g=\psi-U\psi$$

とすると，

$$Af=i(\varphi+U\varphi)$$

$$(Af, g)=(i(\varphi+U\varphi), \psi-U\psi)$$

$$=i(\varphi, \psi)+i(U\varphi, \psi)-i(\varphi, U\psi)-i(U\varphi, U\psi)$$
$$=i[(U\varphi, \psi)-\overline{(U\psi, \varphi)}]=i(U\varphi, \psi)+\overline{i(U\psi, \varphi)}.$$

これは明らかに，f と g，したがって φ と ψ を交換すれば望みの結果を示す．第3はつぎのようにしてわかる：Aのケーリ変換をVとよべば，その定義域はすべての

$$Af+if=i(\varphi+U\varphi)+i(\varphi-U\varphi)=2i\varphi$$

の集合，すなわち U の定義域である．そしてそこでは

$$V(2i\varphi)=V(Af+if)=Af-if=i(\varphi+U\varphi)-i(\varphi-U\varphi)=2iU\varphi$$

が成り立つ．すなわち $V\varphi=U\varphi$．したがって $V=U$ である．

したがって，各 A にそのケーリ変換 U を対応させれば，(閉じた) エルミート作用素は，いたるところ密な $\varphi-U\varphi$ をもつ，われわれの線型な長さを変えない U と1対1に対応する[104]．さて，U のあらゆる長さを変えない拡張Vは容易に見出すことができるから，Aのすべてのエルミートな拡張Bをたやすく見通すことができる ($\varphi-V\varphi$は，その部分集合である $\varphi-U\varphi$ がいたるところ密だから，やはりいたるところ密である)．Aが極大であるためには U がそうでなければならない．また逆が成り立つ．U が極大でなければ $\mathfrak{E}\neq\mathfrak{R}_\infty$, $\mathfrak{F}\neq\mathfrak{R}_\infty$．逆に後者から U が極大でないことがでてくる．なぜなら：そのときは $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}\neq 0$, $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}\neq 0$ だから，$\varphi_0\neq 0$, $\psi\neq 0$ をそれぞれ $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}$ からとりだすことができ，しかも (それらを $\varphi_0/\|\varphi_0\|$, $\psi_0/\|\psi_0\|$ でおきかえて) $\|\varphi_0\|=\|\psi_0\|=1$ とすることができる．そこで $[\mathfrak{E}, \varphi_0]$ における作用素Vを，

$$f=\varphi+a\varphi_0$$

に対して (φ は $\mathfrak{E}$ に属し，a は数である)

$$Vf=U\varphi+a\psi_0$$

となるように定義する——Vは明らかに線型である．φは φ_0 に，$U\varphi$ は ψ_0

104) A の固有値問題がつねにとけるためには，Uのユニタリー性，すなわち $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_n$ または $\mathfrak{R}_\infty$，がこのことからでてこなければならない．極大でない A が存在することから結論されるように，$\mathfrak{R}_\infty$ においてはそうならない．これに反して $\mathfrak{R}_n$ ではそうなっているはずであり，それはまた直接確めることもできる：$\mathfrak{R}_n$ における線型多様体はすべて閉じているから $\varphi-U\varphi$ のつくる線型多様体もまたそうである．それはいたるところ密だから $\mathfrak{R}_n$ に等しい．φ の集合 $\mathfrak{E}$ はそれの線型写像すなわち $\varphi-U\varphi$ の集合より小さい次元をもつことはない．したがって極大の次元数nである．$\mathfrak{E}$ の線型な1対1写像である $\mathfrak{F}$ についても同じである．しかるにnが有限なときには，このことから $\mathfrak{E}=\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_n$ がえられる．

に直交するから，

$$\|f\|^2=\|\varphi\|^2+|a|^2,\quad \|Vf\|^2=\|U\varphi\|^2+|a|^2.$$

ゆえに $\|Vf\|=\|f\|$ となり，Vは長さを変えない．けっきょくVは U の真の拡張である．したがって，Aが極大であることを特徴づけるのは $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}_\infty$ あるいは $\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ である．

反対にAが極大でなければ，閉じた線型多様体 $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}$ はともに $\neq 0$ である．それを張る規格化直交系を $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_p$ および $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_q$ とする (II. 2. の定理 *9* をみよ，$p=1, 2, \cdots\cdots, \infty$, $q=1, 2, \cdots\cdots, \infty$. pあるいは $q=\infty$ のときはφまたはψの列は途切れない)．$r=\mathrm{Min}(p, q)$ とおき，$[\mathfrak{E}, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_r]$ のなかでVをつぎのように定める：

$$f=\varphi+\sum_{\nu=1}^{r}a_\nu\varphi_\nu$$

(φ は $\mathfrak{E}$ に属し，$a_1\cdots\cdots, a_\nu$ は数である) に対して

$$Vf=U\varphi+\sum_{\nu=1}^{r}a_\nu\psi_\nu.$$

ふたたび，Vは線型で長さを変えず，また U の真の拡張であることが容易に認められる．その定義域は $[\mathfrak{E}, \varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_r]$ で，$r=p$ ならそれは $[\mathfrak{E}, \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}]=\mathfrak{R}_\infty$ に等しい；その値域は $[\mathfrak{F}, \psi_1, \cdots\cdots, \psi_r]$ であり，$r=q$ ならそれは $[\mathfrak{F}, \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}]=\mathfrak{R}_\infty$ である．したがってどちらか１つは確かに $\mathfrak{R}_\infty$ に等しい．V をエルミート作用素Bのケーリ変換とすると，いまいったことによってBはAの拡張であり，かつ極大である．φおよびψの選び方は無限に多く (たとえば，ψ_1 を任意の $\theta\psi_1$, $|\theta|=1$ でおきかえることができる)，したがってVとBについてもそうであることは注意されてよい．

これで固有値問題の議論は終りまできた．その結果はつぎのようである：それが解けるときには，その解はただ１つである．しかし極大でない作用素は確実に解けない．極大でない作用素はいつも無限に多くの仕方で極大な作用素に拡張することができる (ここで問題にしているのはいつも閉じたエルミート作用素である)．しかしながら，極大であるための条件は固有値問題が解けるための条件と正確に同じではない．前者は $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}_\infty$ あるいは $\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ であるが，後者は $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}_\infty$ および $\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ である．

最初の条件はみたすがあとの条件はみたさない，すなわち，それに対する固有値問題は解けないような作用素は，極大であるために真の拡張をもたないか

ら，それ以上どうしようもない．そのような作用素はここでは立ちいって論じない．それらは $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}_\infty$，$\mathfrak{F}\neq\mathfrak{R}_\infty$ あるいは $\mathfrak{E}\neq\mathfrak{R}_\infty$，$\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ によって特徴づけられる．そのような作用素は実際存在していて，すべて2つの単純な標準形からできている．したがって，それは固有値問題の解ける極大な作用素に対して例外とみなすことができる．これについてさらに詳しいことは，注 95）にあげた著者の論文中に見出される．そのような作用素は，いつもまえもって量子力学における考察からはとりのけておくべきである．というのは，以下でみるように，エルミート作用素に属する単位の分解は，量子力学のあらゆる概念構成においてまったく本質的な役割を果し，そのためそれの存在，すなわち固有値問題が解けることは欠くことができないからである[105]．そのため一般に，固有値問題がとけるようなエルミート作用素だけが許容される．この性質は極大性をさらにきびしくしたものだから，それらの作用素は超極大であるといわれる[106]．それらは単位の分解に1対1に対応するものである．

最後になお，確実に超極大である（閉じた）エルミート作用素の2つの類についてふれる．第1は連続なものである．これはいたるところで意味をもち，したがって極大，そしてその固有値問題は Hilbert によれば解ける（さきの注をみよ）から超極大である．第2は，$\mathfrak{R}_\infty$ の任意の実現における実作用素が極大であるとき：なぜかというと，$\mathfrak{E}$，$\mathfrak{F}$ の定義における唯一の違いは i の符号であったから，他がすべて実であればなんの違いも生じない：ゆえに

105） それでも，著者がさきの注 78）で示したように，つぎの作用素は極大ではあるが超極大ではない：$\mathfrak{R}_\infty$ は $0\leqq q<+\infty$ で定義され

$$\int_0^\infty |f(q)|^2 dq$$

が有限であるようなすべての $f(q)$ の空間：R は，

$$\int_{-\infty}^\infty |f'(q)|^2 dq$$

が有限で $f(0)=0$ であるような連続的に微分可能なすべての $f(q)$ に対して定義され，かつ閉じさせられた作用素 $-i\dfrac{d}{dq}$ とする．II.8 における A' を区間 $0,\infty$ においてとれば，R は $-\dfrac{2\pi}{h}A'$ に等しく，したがってエルミートである．さてこの R は極大であるが，しかし超極大ではない，それは $\mathfrak{E}$，$\mathfrak{F}$ を実際に調べて証明することができる．$A'=-\dfrac{h}{2\pi}R$ は物理的には運動量の作用素——しかも $q=0$ の壁によって限られる半空間における——と解釈されるのがつねであるだけに，このことは注目に値する．

106） この概念は Erhard Schmidt にゆらいする．注 78）をみよ．

$\mathfrak{E}=\mathfrak{R}_\infty$ から $\mathfrak{F}=\mathfrak{R}_\infty$ が，またはその逆が導かれる．すなわち極大性からそれが超極大であることがでてくる．極大性を前提しないときには，つねに $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}$ と $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}$ とは同じ次元をもつことがいえる．したがって（拡張の可能性について調べたときに利用した記法によれば）$p=q$ ゆえに，$r=p=q$ で

$$[\mathfrak{E},\ \varphi_1,\ \cdots\cdots,\ \varphi_r]=[\mathfrak{E},\ \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{E}]=\mathfrak{R}_\infty,$$
$$[\mathfrak{F},\ \psi_1,\ \cdots\cdots,\ \psi_r]=[\mathfrak{F},\ \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{F}]=\mathfrak{R}_\infty.$$

すなわち，そこでえた拡張は超極大である．したがって，実作用素はつねに超極大な拡張を有する．さきの注 95）では，同じことがすべての定符号の作用素について成り立つことが示された．

10. 交換可能な作用素

II.4 で与えた定義によれば，2 つの作用素 $R,\ S$ は $RS=SR$ が成り立つとき交換可能である．なおこの両辺のいずれもがいたるところで意味をもつのでないときには，両辺の定義域もまた一致しなければならない．われわれはまずエルミート作用素，しかも定義域に関連する困難をさけるために，いたるところで意味をもち，したがって連続なものに話をかぎる．$R,\ S$ とならんでこれらに属する単位の分解 $E(\lambda),\ F(\lambda)$ を同時に考察する．

$R,\ S$ が交換可能であるとは，すべての $f,\ g$ に対して

$$(RSf,\ g)=(SRf,\ g)$$

すなわち，

$$(Sf,\ Rg)=(Rf,\ Sg)$$

を意味する．さらに $R,\ S$ の交換可能性からまた R^n と S $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の交換可能性，したがってまたすべての多項式

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$$

に対して $p(R)$ と S とのそれが導かれる．

さて，記号的に

$$R=\int_{-C}^{C}\lambda dE(\lambda),\quad s(R)=\int_{-C}^{C}s(\lambda)dE(\lambda)$$

と書かれる（C は II.9 で連続な作用素 R——そこでは A とよばれた——に対して導入された定数：$s(x)$ はなにかある函数である．II.8 とくに注 94）を参照）．多項式 $s(x)$ に対して $(s(R)f,\ Sg)=(Sf,\ s(R)g)$ が成り立つから

$$*.\qquad \int_{-C}^{C}s(\lambda)d(E(\lambda)f,\ Sg)=\int_{-C}^{C}s(\lambda)d(Sf,\ E(\lambda)g).$$

連続函数 $s(x)$ は多項式によっていくらでもよく近似することができる（$-C \leqq x \leqq C$ において一様に）から，式 $*$ はまた連続な $s(x)$ に対しても成り立つ．いま

$$s(x)=\begin{cases}\lambda_0-x, & x\leqq\lambda_0 \text{ に対して}\\ 0, & x\geqq\lambda_0 \text{ に対して}\end{cases}$$

とすると，$*$ から

$$\int_{-C}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)d(E(\lambda)f,\ Sg)=\int_{-C}^{\lambda_0}(\lambda_0-\lambda)d(Sf,\ E(\lambda)g)$$

がえられる．この式で λ_0 を $\lambda_0+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ でおきかえたものを，これから差引いて ε で割ると

$$\int_{-C}^{\lambda_0}d(E(\lambda)f,\ Sg)+\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\frac{\lambda-\lambda_0}{\varepsilon}d(E(\lambda)f,\ Sg)$$
$$=\int_{-C}^{\lambda_0}d(Sf,\ E(\lambda)g)+\int_{\lambda_0}^{\lambda_0+\varepsilon}\frac{\lambda-\lambda_0}{\varepsilon}d(Sf,\ E(\lambda)g).$$

$\varepsilon\to0$ とすると（$\overline{S}_1$. に注意！）

$$\int_{-C}^{\lambda_0}d(E(\lambda)f,\ Sg)=\int_{-C}^{\lambda_0}d(Sf,\ E(\lambda)g),$$
$$(E(\lambda_0)f,\ Sg)=(Sf,\ E(\lambda_0)g).$$

したがって，すべての $E(\lambda_0)$，$-C\leqq\lambda_0\leqq C$ は S と交換可能であるが，$\lambda_0<-C$ または $>C$ ではそれぞれ $E(\lambda_0)=0$ または 1 であるから，これらの区間での交換可能性はいうまでもない．

したがって，R が S と交換可能ならば，すべての $E(\lambda)$ もまた S と交換可能である．逆に，すべての $E(\lambda)$ が S と交換可能ならば，すべての函数 $s(x)$ に対して $*$ が成り立ち，したがってすべての $s(R)$ は S と交換可能である．こうして，まず，R はすべての $E(\lambda)$ が S と交換可能なとき，そしてそのときにのみ S と交換可能である．つぎに，そのとき R のすべての函数 $s(R)$ もまた S と交換可能である，と結論することができる．

ところで，$E(\lambda)$ が S と交換可能なのは交換可能性が $E(\lambda)$ とすべての $F(\mu)$ とに対して成り立つとき，そしてそのときだけである（うえの定理を R, S の代りに $S, E(\lambda)$ に対して適用する）．したがって，R, S の交換可能性についても，つぎのことが特徴的である：すべての $E(\lambda)$ はすべての $F(\mu)$ と交換可能でなければならない．さらに上述のことによって，R, S が交換可能であることの結果として $r(R)$ と S との交換可能性，そしてその結果として

(R, S を $S, r(R)$ でおきかえれば) また $r(R)$ と $s(S)$ のそれがえられる.

エルミート作用素 R, S が連続の条件でしばられていないときには, RS と SR との定義域が見極めのつかないまでにこみいっていることがあるので, 情況はいっそう複雑である. 例えば, $R\cdot 0$ はいつも意味をもつが ($0f=0$, $R\cdot 0f=R(0f)=R0=0$ である), 他方 $0\cdot R$ は, Rが意味をもつときにのみ意味があるにすぎない (II.5 でこれについて述べたところを参照). したがって, いたるところでは意味をもたないRに対しては, 定義域の差異のために $R\cdot 0 \neq 0\cdot R$, すなわち, 厳密にいえばRと0とは交換不可能なのである. われわれの目的のためには, そのような事情があるとまずい: 0は連続なエルミート作用素とだけでなく, すべてのエルミート作用素と交換可能であってほしいのである[107].

それでわれわれは, 不連続な R, S に対する交換可能性を別のように定義しようと思う. そのさい, II.9 によって興味ある唯一の作用素である超極大の R, S だけに話を限る. われわれはつぎのように定義する: RとSは, すべての $E(\lambda)$ がすべての $F(\mu)$ (これらはそれぞれの単位の分解) と古い意味で交換可能であるとき, 新しい意味で交換可能であるとよばれる. 連続な R, S に対しては, 新しい定義はすでに知ったように古い定義と同一であるが, RまたはS (あるいは両方) が不連続な場合には, 2つの定義はときに異ってくる. このあとの場合の例はRと0である. 古い意味ではそれらは交換しないが, 0に対する $F(\mu)$ は0または1に等しく[108], したがって $F(\mu)$ は $E(\lambda)$ と交換可能であるから, 新しい意味ではRと0とは交換可能である.

われわれはさきほど, R, S が2つの交換可能な (連続な) エルミート作用素であるならば, Rのすべての函数 $r(R)$ はSのあらゆる函数 $s(S)$ と交換可能であることを証明した. いまの前提は $R=S$ に対してはつねにみたされ

107) $R\cdot 1$ および $1\cdot R$ は, R が意味をもつとき, そしてそのときにのみ意味をもつ (II.5 をみよ) から, $a\neq 0$ ならば $R\cdot a1$ と $a1\cdot R$ に対しても同じことがいえる. するとこの2つの積は等しい, すなわち, R と $a1$ とは交換可能である. したがってRと $a1$ の交換可能性は, $a=0$ かつRがいたるところでは意味をもたないという唯一の例外を除いて成り立つ. これは好ましくないことであり, 交換可能性の定義の変更が示唆される.

108) $a\cdot 1$ に属する単位の分解は

$$F(\mu)=\begin{cases}1, & \mu\geqq a\\ 0, & \mu<a\end{cases}$$

である. これの証明は難なくおこなえる.

るから同じ作用素の 2 つの函数 $r(R)$ と $s(R)$ とはつねに交換可能である [これはまた, II.8 の終りの積の公式からもでてくる: $r(x)s(x)=t(x)$ のとき $r(R)s(R)=t(R)$]. ちなみに, $r(x)$ と $s(x)$ とが実のときには $r(R)$, $s(R)$ はエルミートである [II.8. による; $r(x)$ が実ならば, $(r(R))^*=\bar{r}(R)=r(R)$].

いまのことに関してはその逆もまた成り立つ: A と B が 2 つの交換可能なエルミート作用素であれば, これら 2 つがその函数になっているような, すなわち, $A=r(R)$, $B=s(R)$ であるような 1 つのエルミート作用素 R が存在する. さらに, 交換可能なエルミート作用素 $A, B, C, \cdots\cdots$ の (有限あるいは無限の) 任意の集合が与えられたとき, すべての $A, B, C, \cdots\cdots$ がそれの函数となるような 1 つのエルミート作用素 R が存在する. ここで, これらの定理の証明をおこなうことはできない. この問題についての文献をあげるにとどめる[109]. われわれの目的にとっては, この定理は, 純粋の点スペクトルをもつ有限個の $A, B, C, \cdots\cdots$ に関してのみ重要である. そのような場合については以下で証明するが, 一般の場合については概観的な見通しを与えるだけにする.

そこで, 純粋な点スペクトルをもつ有限個のエルミート作用素を $A, B, C, \cdots\cdots$ とする. λ をある 1 つの数として, $Af=\lambda f$ のすべての解によって張られる閉じた線型多様体を $\mathfrak{L}_\lambda$, それの射影作用素を E_λ とする. $f \neq 0$ であるような解があるとき, したがって $\mathfrak{L}_\lambda \neq (0)$, すなわち, $E_\lambda \neq 0$ のとき, そしてそのときにだけ, λ は A の点固有値である. 同様にして, B に対して $\mathfrak{M}_\lambda, F_\lambda$; C に対して $\mathfrak{N}_\lambda$, G_λ; $\cdots\cdots$ をつくる.

$$Af=\lambda f$$

から

$$ABf=BAf=B(\lambda f)=\lambda Bf$$

がでてくる, すなわち, f とともに Bf もまた $\mathfrak{L}_\lambda$ に属する. $E_\lambda f$ はつねに $\mathfrak{L}_\lambda$ に属するから, $BE_\lambda f$ もそうである. したがって

$$E_\lambda BE_\lambda f=BE_\lambda f.$$

これは恒等的に成り立つから

$$E_\lambda BE_\lambda=BE_\lambda;$$

109) 2 つのエルミート作用素があって, その一方が特別な類 (いわゆる完全連続なもの, さきの注 70) をみよ) に属している場合には, Toeplitz が 1 つの定理を証明し (例えば注 33) をみよ), それからうえの定理が導かれる (つまり A と B に共通の固有函数からなる規格化された完全直交系の存在). 任意の A, B あるいは $A, B, C, \cdots\cdots$ に対する一般の場合については著者が注 94) において証明した.

これのエルミート共役をとると,

$$E_\lambda B E_\lambda = E_\lambda B.$$

したがって,

$$E_\lambda B = B E_\lambda.$$

こうしてAとBとの交換可能性からBとE_λとのそれを導いたのとまったく同じようにして, BとE_λとの交換可能性からまたE_λとF_λとの交換可能性が導かれる. A, B は $A, B, C, \cdots\cdots$ のあいだでなんら特別のものではないから, こうしてすべての $E_\lambda, F_\mu, G_\nu, \cdots\cdots$ はたがいに交換可能であるということができる. したがって

$$K(\lambda, \mu, \nu\cdots\cdots) = E_\lambda F_\mu G_\nu \cdots\cdots$$

もまた射影作用素であり, それの閉じた線型多様体は $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ と書かれる. 定理 *14* (II. 4) によって $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ は $\mathfrak{L}_\lambda, \mathfrak{M}_\mu, \mathfrak{N}_\nu, \cdots\cdots$ の共通部分, すなわち,

$$Af = \lambda f,\ Bf = \mu f,\ Cf = \nu f, \cdots\cdots$$

の共通な解全部の集りである.

$\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots$ および $\lambda', \mu', \nu', \cdots\cdots$ を 2 つの異なる数の組とする: すなわち, $\lambda \neq \lambda'$ あるいは $\nu \neq \nu', \cdots\cdots$, f は $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ に, f' は $\mathfrak{K}(\lambda'\mu'\nu'\cdots\cdots)$ に属するとすれば, f と f' とは直交する: $\lambda \neq \lambda'$ の場合は

$$Af = \lambda f,\quad Af' = \lambda' f'$$

によって, $\mu \neq \mu'$ の場合は

$$Bf = \mu f,\quad Bf' = \mu' f'$$

によって, …… そうなる. したがって, $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ 全体が $\mathfrak{K}(\lambda'\mu'\nu'\cdots\cdots)$ 全体に直交する.

Aは純粋な点スペクトルをもつから, $\mathfrak{L}_\lambda$ は全 $\mathfrak{R}_\infty$ を張る (閉じた線型多様体として). したがって $f \neq 0$ はすべての $\mathfrak{L}_\lambda$ に直交することはありえない, すなわち, 少くとも 1つの $\mathfrak{L}_\lambda$ に対しては, その $\mathfrak{L}_\lambda$ への射影が 0 でない, つまり

$$E_\lambda f \neq 0$$

でなければならない. 同様に 1 つの μ があって

$$F_\mu f \neq 0,$$

さらに 1 つの ν に対して

$$G_\nu f \neq 0,$$

……でなければならない．したがって，どんな $f\neq0$ に対しても，

$$E_\lambda f\neq0$$

となるような λ を見出すことができる．そうすると

$$F_\mu(E_\lambda f)\neq0$$

となるような μ，またそうすれば

$$G_\nu(F_\mu(E_\lambda f))\neq0$$

となるような ν…… を見出すことができる．こうしてけっきょく，

$$\cdots\cdots G_\nu F_\mu E_\lambda f\neq0,\ \ E_\lambda F_\mu E_\nu\cdots\cdots f\neq0,\ \ K(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)f\neq0$$

すなわち，f は $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ に直交しない，したがって，すべての $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ に直交する f は $=0$ である．それゆえ，$\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ は全体で閉じた線型多様体として全 $\mathfrak{R}_\infty$ を張る．

いま，$\varphi^{(1)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$，$\varphi^{(2)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$ を，閉じた線型多様体 $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ を張る規格化直交系とする．（この点列は，$\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ の次元が有限であるか無限であるかにしたがって，途中で切れるかまたは無限に続く；他方 $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)=0$ ならば，この点列は 0 だけからなる）．各 $\varphi^{(n)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$ は 1 つの $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ に属するから，それは $A, B, C,$…… すべての固有函数である．2 つの異なる $\varphi^{(n)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$ はいつもたがいに直交する：それが同一の $\lambda, \mu, \nu,$…… の組をもつならば，その成り立ちからしてそうである：異なる $\lambda, \mu, \nu,$…… の組をもつときには，それらは異なる $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ に属するから直交する．$\varphi^{(n)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$ 全部は $\mathfrak{K}(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)$ の全体と同一の閉じた線型多様体，すなわち $\mathfrak{R}_\infty$ を張る．したがって，$\varphi^{(n)}{}_{(\lambda\mu\nu\cdots\cdots)}$ は 1 つの規格化された完全直交系をつくる．

こうしてわれわれは，$A, B, C,$…… の共通の固有函数だけから規格化された完全直交系をつくりあげたことになる．これ以後それを任意に $\psi_1, \psi_2,$…… とよぶことにし，それぞれに属する固有値方程式を

$$A\psi_m=\lambda_m\psi_m,\ \ B\psi_m=\mu_m\psi_m,\ \ C\psi_m=\nu_m\psi_m,\ \cdots\cdots$$

と書く．

そこで，たがいに異なる数の組を $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3,$…… となづけ，純粋な点スペクトル $\kappa_1, \kappa_2,$…… をもち，かつそれに属する固有函数が $\psi_1, \psi_2,$…… であるようなエルミート作用素 R をつくる．すなわち

$$R\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\psi_m\right)=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\kappa_m\psi_m\text{[110]}.$$

いま，$F(\kappa)$ を $-\infty<\kappa<+\infty$ で定義された函数で，

$$F(\kappa_m)=\lambda_m \quad (m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

が成り立つようなものであるとする（κ のこれ以外の値に対しては $F(\kappa)$ は任意でよい）．同様に $G(\kappa)$ は

$$G(\kappa_m)=\mu_m$$

となるような函数，$H(\kappa)$ は

$$H(\kappa_m)=\nu_m$$

となるような函数，……とする．そうすると

$$A=F(R),\quad B=G(R),\quad C=H(R),\ \cdots\cdots$$

となることを示そう．

われわれの証明すべきことは，R が純粋の点スペクトル $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \cdots\cdots$ と固有函数 $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\cdots$ をもつならば，$F(R)$ は純粋の点スペクトル $F(\kappa_1),\ F(\kappa_2),\ \cdots\cdots$ と，うえと同一の固有函数 $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\cdots$ とをもつ，ということである．ところで，この $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\cdots$ はいずれにせよ規格化された完全直交系をつくっているから，

$$F(R)\psi_m=F(\kappa_m)\psi_m$$

を証明すれば十分である．

II.8. にしたがって，

---

110) R が連続であるためには，$\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3,\ \cdots\cdots$ は有界に選ばなければならい．例えば $\kappa_m=\dfrac{1}{m}$．R の連続性，すなわち，

$$\|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|$$

から，ただちに

$$\|R\psi_m\|=\|\kappa_m\psi_m\|=|\kappa_m|\leqq C\cdot\|\psi_m\|,\quad |\kappa_m|\leqq C$$

がでてくる．また逆に

$$\kappa_m\leqq C \quad (m=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

から

$$\|Rf\|^2=\|R(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\psi_m)\|^2=\|\sum_{m=1}^{\infty}x_m\kappa_m\psi_m\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|^2|\kappa_m|^2,$$

$$\|f\|^2=\|\sum_{m=1}^{\infty}x_m\psi_m\|^2=\sum_{m=1}^{\infty}|x_m|^2.$$

したがって

$$\|Rf\|^2\leqq C^2\cdot\|f\|^2,\quad \|Rf\|\leqq C\cdot\|f\|.$$

すなわち，R の連続性がえられる．

$$E(\lambda)=\sum_{\kappa_m\leqq\lambda}P_{[\psi_m]}$$

をRに属する単位の分解とする．すると，すでに知っているように，記号的に

$$R=\int\lambda dE(\lambda).$$

また定義によって

$$F(R)=\int F(\lambda)dE(\lambda).$$

さらに

$$E(\lambda)\psi_m=\begin{cases}\psi_m, & \kappa_m\leqq\lambda \text{ に対して}\\ 0, & \kappa_m>\lambda \text{ に対して}\end{cases}$$

が成り立つ．これからすべての g に対して

$$(F(R)\psi_m,\ g)=\int F(\lambda)d(E(\lambda)\psi_m,\ g)=F(\kappa_m)(\psi_m,\ g).$$

したがって，実際に

$$F(R)\psi_m=F(\kappa_m)\psi_m$$

である．これで予告しておいた通り，純粋の点スペクトルの場合はかたがついた．連続スペクトルの場合は，注109）の指示だけで満足しなければならない．ただ特別に特徴的な場合だけは指摘しておきたい．

$\mathfrak{R}_\infty$ は

$$\int\int|f(q_1q_2)|^2dq_1dq_2$$

が有界であるようなすべての $f(q_1q_2)$ の空間とし，q_1, q_2 の変域は正方形 $0\leqq q_1$, $q_2\leqq 1$ であるとする．

$$A=q_1\cdots\cdots,\quad B=q_2\cdots\cdots$$

という作用素をつくると，これらはエルミートで，うえのような q_1, q_2 の領域では連続でもあり（$-\infty<q_1$, $q_2<+\infty$ ならば連続でない!），しかも交換可能である．したがって，どちらもあるRの函数でなければならない．ゆえにRはA, Bと交換可能であり，そのことからして，ここでは詳論するわけにいかないが，Rは $s(q_1,\ q_2)\cdots\cdots$ という形をもつ（$s(q_1,\ q_2)$ は有界な函数）ことがでてくる．したがって，R^n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は $(s(q_1,\ q_2))^n\cdots\cdots$ に等しく，$F(\kappa)$ が多項式であるかぎり，$F(R)$ は $F(s(q_1,\ q_2))\cdots\cdots$ に等しい．しかるにこの公式は，ここで詳しくたちいることはできないが，すべての $F(\kappa)$ へ拡張することができる．したがって，$F(R)=A$, $G(R)=B$ の帰結として

$$F(s(q_1,\ q_2))=q_1,\quad G(s(q_1,\ q_2))=q_2$$

となる[111]. すなわち，たがいに相反的な写像

$$s(q_1, q_2)=\kappa$$

および

$$F(\kappa)=q_1, \quad G(\kappa)=q_2$$

は，正方形の面 $0\leqq q_1, q_2\leqq 1$ を，κ の線状の集合に1対1に写像しなければならない——これは，なにか幾何学的な直観と矛盾している.

しかし，さきにあげた証明にもとづけば，これはそれにもかかわらず可能でなければならない——そして事実望みのような写像はいわゆる Peano の曲線によって実現される[112]ことがわかるのである. 実際，注 109) で引用した証明を厳密に調べてみると，いまの場合にはこの証明が Peano の曲線あるいはそれに類似の図形へ導くことが示される.

11. スプール

作用素の二，三の重要な不変量をここで定義しておこう.

$\mathfrak{R}_n$ の行列 $\{a_{\mu\nu}\}$ ではスプール

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\mu}$$

がこのようなものの1つである. それはユニタリー不変である. つまり $\{a_{\mu\nu}\}$ を他の（デカルト）座標系に変換しても，それは変化しない[113]. ところで，行

111) ルベーグ測度が0の q_1, q_2-集合に対しては例外が許される.

112) 例えば，さきの注 45) をみよ.

113) $\{a_{\mu\nu}\}$ は変換（すなわち作用素）

$$\eta_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\xi_\nu$$

$(\mu=1, \cdots\cdots, n$, II. 7 の詳論を見よ）を表わす.

$$\xi_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu\mu}\mathfrak{x}_\nu, \quad \eta_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu\mu}\mathfrak{y}_\nu \quad (\mu=1, \cdots\cdots, n)$$

によって変換すると，これは，

$$\mathfrak{y}_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{a}_{\mu\nu}\mathfrak{x}_\nu. \quad (\mu=1, \cdots\cdots, n)$$

$$\mathfrak{a}_{\mu\nu}=\sum_{\rho,\sigma=1}^{n} a_{\rho\sigma}\bar{x}_{\mu\rho}x_{\nu\sigma} \quad (\mu, \nu=1, \cdots\cdots, n)$$

となる. $\{\mathfrak{a}_{\mu\nu}\}$ は変換された行列である. 明らかに

$$\sum_{\mu=1}^{n}\mathfrak{a}_{\mu\mu}=\sum_{\mu,\rho,\sigma=1}^{n} a_{\rho\sigma}\bar{x}_{\mu\rho}x_{\mu\sigma}=\sum_{\rho,\sigma=1}^{n} a_{\rho\sigma}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{x}_{\mu\rho}x_{\mu\sigma}\right)=\sum_{\rho=1}^{n} a_{\rho\rho}.$$

すなわち，スプールは不変である.

列 $\{a_{\mu\nu}\}$ をそれに対応する作用素

$$A\{x_1, \cdots\cdots, x_n\}=\{y_1, \cdots\cdots, y_n\}$$

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\nu$$

でもっておきかえると，$a_{\mu\nu}$ は A を使ってつぎのように表わされる：

$\varphi_1=\{1, 0, \cdots\cdots, 0\}$, $\varphi_2=\{0, 1, \cdots\cdots, 0\}$, ……, $\varphi_n=\{0, 0, \cdots\cdots, 1\}$ を規格化された完全直交系とすると，そのとき明らかに

$$a_{\mu\nu}=(A\varphi_\nu, \varphi_\mu)$$

である（II. 5. とくに注 60）を参照）. したがって，スプールは

$$\sum_{\mu=1}^{n}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)$$

であり，これがユニタリー不変であることは，その値がすべての規格化された完全直交系に対して同じであることを意味する.

$\mathfrak{R}_\infty$ の場合にこの概念構成に相当するものをただちに作ることができる：A を１つの線型作用素とする. すべての $A\varphi_\mu$ が意味をもつような，ある１つの規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をとり（A の定義域がいたるところ密であれば，これはたしかに可能である——その定義域のなかで密な点列 $f_1, f_2, \cdots\cdots$ を II. 2. 定理 *8* にしたがって直交化すればよい），

$$\mathrm{Spur}(A)=\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)$$

とおく. これが実際に A だけにしか依存しない（そして φ_μ には依存しない!）ことを示さなければならない.

この目的のために，まず最初に２つの規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ および $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ を導入し，

$$\mathrm{Spur}(A\,;\,\varphi, \psi)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)$$

とする. II. 2. 定理 *7. γ.* から，これが $\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)$ に等しく，したがって ψ_ν には，ただ見かけのうえでだけ依存していることが示される. さらに

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(\varphi_\mu, A^*\psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)$$

$$= \overline{\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(A^*\psi_\nu,\ \varphi_\mu)(\varphi_\mu,\ \psi_\nu)},$$

すなわち，

$$\mathrm{Spur}(A\,;\ \varphi,\ \psi)=\overline{\mathrm{Spur}(A^*:\ \psi,\ \varphi)}.$$

右辺はうえに述べたことから φ_μ には見かけ上依存しているだけであるから，同じことは左辺についてもいえる：したがってそれの φ_μ への依存も，また同様に ψ_ν へのそれも見かけだけのものであり，したがって実はAにのみ依存するだけである．したがって，$\mathrm{Spur}(A\,;\ \varphi,\ \psi)$ は $\mathrm{Spur}(A)$ と書いてよい．それは，

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)$$

に等しいから，求める不変性の証明は達せられた．最後の等式からまた

$$\mathrm{Spur}(A)=\overline{\mathrm{Spur}(A^*)}$$

が導かれる．

$$\mathrm{Spur}(aA)=a\,\mathrm{Spur}(A),$$
$$\mathrm{Spur}(A\pm B)=\mathrm{Spur}(A)\pm\mathrm{Spur}(B)$$

という関係は自明であり，また（交換可能でない $A,\ B$ に対しても）

$$\mathrm{Spur}(AB)=\mathrm{Spur}(BA)$$

が成り立つ．これはつぎのようにして示される：

$$\mathrm{Spur}(AB)=\sum_{\mu=1}^{\infty}(AB\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)=\sum_{\mu=1}^{\infty}(B\varphi_\mu,\ A^*\varphi_\mu)$$
$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(B\varphi_\mu,\ \psi_\nu)(\psi_\nu,\ A^*\varphi_\mu)$$
$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(B\varphi_\mu,\ \psi_\nu)(A\psi_\nu,\ \varphi_\mu).$$

ここで $\varphi_1,\ \varphi_2\cdots\cdots$ および $\psi_1,\ \psi_2\cdots\cdots$ は任意の2つの規格化された完全直交系であればよい．この表式の $A,\ B$ についての対称性は（同時に $\varphi,\ \psi$ を交換するとき）明らかである．したがってエルミート作用素 $A,\ B$ に対して

$$\mathrm{Spur}(AB)=\overline{\mathrm{Spur}((AB)^*)}=\overline{\mathrm{Spur}(B^*A^*)}$$
$$=\overline{\mathrm{Spur}(BA)}=\overline{\mathrm{Spur}(AB)}$$

が成り立つから，$\mathrm{Spur}(AB)$ は実数である [$\mathrm{Spur}(A)$ については当然そうである]．

$\mathfrak{M}$ が閉じた線型多様体であり，Eがその射影作用素であるとすると，Spur (E) はつぎのように決められる：$\psi_1, \cdots\cdots, \psi_k$ はこの閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ を張る規格化直交系であるとし，$\chi_1, \cdots\cdots, \chi_l$ は $\mathfrak{R}_\infty - \mathfrak{M}$ を張るものとする（もちろん k または l が，あるいは両方ともが無限大である）——そうすると $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_k$, $\chi_1, \cdots\cdots, \chi_l$ は合わせて $\mathfrak{R}_\infty$ を張る．すなわち，それらは規格化された完全直交系を作る（II. 2 の定理 *7. α*）．したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(E) &= \sum_{\mu=1}^{k}(E\psi_\mu,\ \psi_\mu) + \sum_{\mu=1}^{l}(E\chi_\mu,\ \chi_\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{k}(\psi_\mu,\ \psi_\mu) + \sum_{\mu=1}^{l}(0,\ \chi_\mu) \\ &= \sum_{\mu=1}^{k}1 = k.\end{aligned}$$

である．つまり Spur(E) は $\mathfrak{M}$ の次元数である．

Aが定符号であれば，すべての $(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu) \geqq 0$ であり，したがって

$$\mathrm{Spur}(A) \geqq 0$$

である．このときに Spur(A)=0 であれば，$(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)$ がすべて消えなければならないから，$A\varphi_\mu = 0$ である（II. 5 の定理 *19*）．$\|\varphi\| = 1$ であるときには，$\varphi_1 = \varphi$ であるような規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を見つけることができる（$f_1, f_2, \cdots\cdots$ がいたるところ密であるとし，$\varphi, f_1, f_2, \cdots\cdots$ を“直交化”する——II. 2, 定理 *7.* の証明を見よ——それによってφで始まる規格化された完全直交系がえられる）．それゆえ

$$A\varphi = 0.$$

いまfが任意であれば，$f=0$ に対して $Af=0$ は明らかであり，$f \neq 0$ に対しては，うえのことから

$$\varphi = \frac{1}{\|f\|}f$$

とおいて $Af=0$ が導かれる——したがって $A=0$ である．すなわち，もし A が定符号で，かつ $\neq 0$ であれば

$$\mathrm{Spur}(A) > 0.$$

スプールにかんするわれわれの考察は簡潔でしかも単純ではあるけれども，数学的に完全ではない．というのは，われわれは級数

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu,\ \psi_\nu)(\psi_\nu,\ \varphi_\mu) \quad および \quad \sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)$$

をそれらの収斂をかえりみずに考察し，変形したり（順序を変えて和をとったり）してきた——要するに，正しいやり方では許されるべきでないようなことがすべておこなわれていた．なるほどこのような粗略さは理論物理学のなかでこのほかにもみられるし，また，いま問題になっているものも，われわれの量子力学への適用において，なんら害をもたらすものではないけれども，粗略なやり方をしてきたことは，はっきり認めなければならない．

それだけに，つぎの事実を強調することがますます肝要である：量子力学の基本的な統計的命題においては，A, B がともに定符号であるような作用素 AB に対するスプールだけが用いられる．そしてこの概念は完全にげんみつに基礎づけられうる．それゆえ，この節の残りでは，スプールにかんして，絶対的な数学的げんみつさをもって証明できるような事柄をまとめようと思う．

最初に A^*A のスプールを考察する [A は任意，A^*A は II.4 によって，エルミート，そして

$$(A^*Af,\ f)=(Af,\ Af)\geqq 0$$

のために定符号である].

$$\mathrm{Spur}(A^*A)=\sum_{\mu=1}^{\infty}(A^*A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)=\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu,\ A\varphi_\mu)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\varphi_\mu\|^2$$

である．この級数は $\geqq 0$ の項だけをもつからそれは収斂するか，$+\infty$ に発散する．だからいずれにせよ意味をもつ．さていままで述べたこととは無関係に，それの和が $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ のえらび方にはよらないことを示そうと思う．そのさい，$\geqq 0$ の項をもった級数だけしか現われないであろうから，級数はすべて意味をもち，また和の順序の変更も許されるであろう．

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ および $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ を2つの規格化された完全直交系として，

$$\sum(A;\ \varphi_\mu,\ \psi_\nu)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(A\varphi_\mu,\ \psi_\nu)|^2$$

と定義する．II.2 の定理 7. γ. によると，これは $\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\varphi_\mu\|^2$ に等しい．つまり $\sum(A;\ \varphi_\mu,\ \psi_\nu)$ はみかけのうえで ψ_ν に依存するにすぎない．さらに（$A\varphi_\mu$ および $A^*\psi_\nu$ は意味をもたなければならない），

$$\sum(A;\ \varphi_\mu,\ \psi_\nu)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(A\varphi_\mu,\ \psi_\nu)|^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(\varphi_\mu,\ A^*\psi_\nu)|^2$$

$$= \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} |(A^*\psi_\nu, \varphi_\mu)|^2 = \sum (A^*; \psi_\nu, \varphi_\mu).$$

したがって，この式の右端を見ればわかるように，φ_μ への依存性もまたみかけのうえだけである．このようにして $\sum(A; \varphi_\mu, \psi_\nu)$ は一般にAにだけ関係する．これを $\sum(A)$ とよぼう．うえに証明したことによって

$$\sum(A) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \|A\varphi_\mu\|^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} |(A\varphi_\mu, \psi_\nu)|^2$$

であり，かつ

$$\sum(A) = \sum(A^*)$$

である．これによって Spur(A^*A) は $\sum(A)$ として正しく定義されなおされる．

なお，$\sum(A)$ の二，三の性質を独立に証明する．それらは，Spur(A) についてすでに導き出した一般的な結論からも同様に示される．

定義から一般に

$$\sum(A) \geqq 0$$

であり，$\sum(A)=0$ に対してはすべての $A\varphi_\mu=0$ でなければならない．これからまえと同じく $A=0$ が導かれる．すなわち：$A \neq 0$ に対しては $\sum(A)>0$.

あきらかに

$$\sum(aA) = |a|^2 \sum(A)$$

である．もし $A^*B=0$ であれば，

$$\|(A+B)\varphi_\mu\|^2 - \|A\varphi_\mu\|^2 - \|B\varphi_\mu\|^2 = (A\varphi_\mu, B\varphi_\mu) + (B\varphi_\mu, A\varphi_\mu)$$
$$= 2\,\mathrm{Re}(A\varphi_\mu, B\varphi_\mu) = 2\,\mathrm{Re}(\varphi_\mu, A^*B\varphi_\mu) = 0$$

であるから，和 $\sum_{\mu=1}^{\infty}$ をとると

$$\sum(A+B) = \sum(A) + \sum(B)$$

が成り立つ．この関係は，そのなかの A, B を交換しても変わらないから，それは $B^*A=0$ に対しても成り立つ．さらに A, B を A^*, B^* でおきかえることもできるから，$AB^*=0$ あるいは $BA^*=0$ もまた同様に十分である．エルミートな A（あるいは B）に対してはしたがって $AB=0$, あるいは，$BA=0$ と書くことができる．

Eが閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ の射影作用素であれば，Spur(E) を決めたときに考えた $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_k$, $\chi_1, \cdots\cdots, \chi_l$ を使って

$$\sum(E)=\sum_{\mu=1}^{k}\|E\psi_\mu\|^2+\sum_{\mu=1}^{l}\|E\chi_\mu\|^2=\sum_{\mu=1}^{k}\|\psi_\mu\|^2+\sum_{\mu=1}^{l}\|0\|^2=\sum_{\mu=1}^{k}1=k$$

である．すなわち $\sum(E)$ もまた $\mathfrak{M}$ の次元数である（これはまた

$$E^*E=EE=E$$

のために，当然期待されるところであった）．

2つの定符号の（エルミート）作用素 A, B に対しては Spur(AB) が $\sum$ に還元される．すなわち，

$$A'^2=A,\quad B'^2=B$$

であるような同じ種類の作用素 A', B' がある[114)]．——それらを $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ とよぶ．まったく形式的に，

$$\begin{aligned}\text{Spur}(AB)&=\text{Spur}(\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\cdot\sqrt{B})\\&=\text{Spur}(\sqrt{B}\cdot\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B})\end{aligned}$$

---

114) げんみつにいうとこの主張はつぎのとおりである：A を超極大かつ定符号であるとすると，$A'^2=A$ であるような同種類の作用素 A' がただ1つ存在する．この存在を証明する．

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$$

を A の固有値表現としよう．Aは定符号であるから，$E(\lambda)$ は $\lambda<0$ に対して不変である（したがって $\bar{S}_1$. によって0に等しい）．なぜならば，かりにそうでないとすると，適当な $\lambda_1<\lambda_2<0$ に対して $E(\lambda_2)-E(\lambda_1)\neq0$ であり，したがって

$$(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))f=f$$

であるような $f\neq0$ をえらぶことができるであろう——これから，すでに何度も結論したように，

$$E(\lambda)f=\begin{cases}f & \lambda\geqq\lambda_2 \text{ のとき}\\0 & \lambda\leqq\lambda_1 \text{ のとき}\end{cases}$$

が導かれる．したがって

$$\begin{aligned}(Af, f)&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)f, f)=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda d(E(\lambda)f, f)\leqq\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\lambda_2 d(E(\lambda)f, f)\\&=\lambda_2((E(\lambda_2)-E(\lambda_1))f, f)=\lambda_2(f, f)<0\end{aligned}$$

となるからである．したがって

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)=\int_0^{\infty}\lambda dE(\lambda)=\int_0^{\infty}\mu^2 dE(\mu^2)$$

であり，

$$A'=\int_0^{\infty}\mu dE(\mu^2)$$

が求めるものをあたえる．

注意すべきことは：われわれは定符号性から $\lambda<0$ に対する $E(\lambda)=0$ を結論した．明らかにこれから定符号性が導かれるから，このこと，すなわち全スペクトルが $\geqq0$ であるということは，定符号性を特徴づける．

$$=\mathrm{Spur}((\sqrt{A}\sqrt{B})^*(\sqrt{A}\sqrt{B}))=\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})$$

である．そしてこの $\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})$ は，スプールとの関係を考えないでもそれ自体の定義にもとづいて，$\mathrm{Spur}(AB)$ に対して予期される性質をすべてもっている——すなわち，

$$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})=\sum(\sqrt{B}\sqrt{A}),$$
$$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B+C})=\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})+\sum(\sqrt{A}\sqrt{C}),$$
$$\sum(\sqrt{A+B}\sqrt{C})=\sum(\sqrt{A}\sqrt{C})+\sum(\sqrt{B}\sqrt{C}).$$

第1は，$\sum(XY)$ が X, Y について対称であることから導かれる：

$$\sum(XY)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(XY\varphi_\mu,\ \psi_\nu)|^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(Y\varphi_\mu,\ X\psi_\nu)|^2.$$

第2は第1にもとづいて第3から導かれる．したがって，第3だけを証明すればよい.——すなわち，$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})$ が A について加法的であることである．ところでこのことは，$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})$ をつぎのように書けば，認められる：

$$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})=\sum_{\mu=1}^{\infty}\|\sqrt{A}\sqrt{B}\varphi_\mu\|^2=\sum_{\mu=1}^{\infty}(\sqrt{A}\sqrt{B}\varphi_\mu,\ \sqrt{A}\sqrt{B}\varphi_\mu)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}(\sqrt{A}\cdot\sqrt{A}\sqrt{B}\varphi,\ \sqrt{B}\varphi_\mu)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\sqrt{B}\varphi_\mu,\ \sqrt{B}\varphi_\mu).$$

このようにして，さきに望ましいものとされた範囲内で，スプールの概念のげんみつな基礎づけが遂行されたことになる．最後の式は，そのほかにもまたつぎの結論を許す：もし A, B が定符号であれば，

$$AB=0$$

は

$$\mathrm{Spur}(AB)=0$$

から帰結される．なぜならば，これは

$$\sum(\sqrt{A}\sqrt{B})=0$$

を意味するから $\sqrt{A}\sqrt{B}=0$ (148 頁に述べたこと，あるいはまたあとに続く $\sum$ についての考察を見よ)，したがって

$$AB=\sqrt{A}\cdot\sqrt{A}\sqrt{B}\cdot\sqrt{B}=0$$

となるからである.

定符号のエルミート作用素Aに対してはスプールの計算はもともとの形においてさえ正しい. なぜならば, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を規格化された完全直交系とすると,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)$$

(スプールを定義すべきところの和!) は $\geqq 0$ の項だけの和であるから, 収斂するかあるいは ($+\infty$ に向って) 真に発散するかである. ここで2つの場合が可能である: この和は $\varphi_1, \varphi_2\cdots\cdots$ をどのようにえらんでも無限大であるか——そのときにはスプールは実際に $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に無関係に定義され, しかも $+\infty$ である——, あるいは $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の少くとも1つのえらび方, たとえば $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \cdots\cdots$ のさいに有限になるかである. このときは

$$\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\overline{\varphi}_\mu,\ \overline{\varphi}_\mu)\right)^2=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}(A\overline{\varphi}_\mu,\ \overline{\varphi}_\mu)(A\overline{\varphi}_\nu,\ \overline{\varphi}_\nu)$$

$$\geqq\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|(A\overline{\varphi}_\mu,\ \overline{\varphi}_\nu)|^2=\sum(A)$$

によって $\sum(A)$ もまた有限であり, たとえば C^2 に等しい. $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ をある1つの規格化された完全直交系とすると,

$$\sum(A)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\psi_\mu\|^2=C^2,\quad \|A\psi_1\|^2\leqq C^2,$$

$$\|A\psi_1\|\leqq C.$$

$\|\psi\|=1$ であるような任意のψをこのような系の ψ_1 としてえらぶことができるから, $\|\psi\|=1$ から $\|A\psi\|\leqq C$ が導かれる. したがって一般に

$$\|Af\|\leqq C\cdot\|f\|$$

である: $f=0$ に対してはこれは自明であり, $f\neq 0$ に対しては

$$\psi=\frac{1}{\|f\|}\cdot f$$

とおけばよい. したがってAは II. 9 の条件 **St.** をみたし, 連続な作用素である. しかし, なおはるかに多くのことが主張できる.

すなわち, $\sum(A)$ が有限であるためにAはいわゆる完全連続な作用素の類に属する. この作用素について Hilbert は, その固有値問題が最初の形にお

いて解くことができること，すなわち，

$$A\psi_\mu=\lambda_\mu\psi_\mu$$

（しかも $\mu\to\infty$ に対して $\lambda_\mu\to 0$）であるような規格化された完全直交系 ψ_1, ψ_2, …… が存在することを示した[115]．定符号性のために

$$\lambda_\mu=(A\psi_\mu,\ \psi_\mu)\geqq 0$$

であり，さらに

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\lambda_\mu{}^2=\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\psi_\mu\|^2=\sum(A)=C^2$$

115）まえにあげた注 64）を参照．直接の証明はこのようにして行われる：$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots<\lambda_n$ はすべて $\geqq\varepsilon$ かあるいはすべて $\leqq-\varepsilon$ であり，$E(\lambda_0)\neq E(\lambda_1)\neq E(\lambda_2)\neq\cdots\cdots\neq E(\lambda_n)$ であるとしよう．そうすると

$$E(\lambda_\lambda)-E(\lambda_{\nu-1})\neq 0$$

であり，したがって

$$(E(\lambda_\nu)-E(\lambda_{\nu-1}))\varphi_\nu=\varphi_\nu$$

であるような $\varphi_\nu\neq 0$ をえらぶことができる．このことから

$$E(\lambda)\varphi_\nu=\begin{cases}\varphi_\nu & \lambda\geqq\lambda_\nu \text{ のとき}\\ 0 & \lambda\leqq\lambda_{\nu-1} \text{ のとき}\end{cases}$$

が導かれる――また $\|\varphi_\nu\|=1$ にすることもできる．うえに述べたことから

$$\mu\neq\nu \text{ のとき } (\varphi_\mu,\ \varphi_\nu)=0$$

が導かれる．したがって $\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_n$ は規格化された直交系を作る．これを完全な系に拡大することができる：$\varphi_1,\cdots\cdots,\varphi_n,\ \varphi_{n+1},\cdots\cdots$.

つぎの式が成り立つ（$\nu=1,\cdots\cdots,n$）

$$\begin{aligned}\|A\varphi_\nu\|^2&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2d\|E(\lambda)\varphi_\nu\|^2=\int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu}\lambda^2d\|E(\lambda)\varphi_\nu\|^2\\&\geqq\int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu}\varepsilon^3d\|E(\lambda)\varphi_\nu\|^2=\varepsilon^2(\|E(\lambda_\nu)\varphi_\nu\|^2-\|E(\lambda_{\nu-1})\varphi_\nu\|^2)\\&=\varepsilon^2\|\varphi_\nu\|^2=\varepsilon^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\varphi_\mu\|^2\begin{cases}\geqq\sum_{\mu=1}^{n}\|A\varphi_\mu\|^2\geqq n\varepsilon^2\\=\sum(A)=C^2.\end{cases}$$

すなわち

$$n\leqq\frac{C^2}{\varepsilon^2}.$$

すなわち，$|\lambda|\geqq\varepsilon$ のとき $E(\lambda)$ は一般に $\leqq 2\cdot\dfrac{C^2}{\varepsilon^2}$ だけの異った値しかとることができない．それゆえ，$E(\lambda)$ は有限個の飛躍点においてのみ変化し，それらのあいだには不変区間がある．すなわち：$|\lambda|\geqq\varepsilon$ のときにはただ点スペクトルのみがある．これはすべての $\varepsilon>0$ に対して成り立つから，一般に純粋な点スペクトルのみが存在する．

である．$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をある1つの規格化された完全直交系とすると，

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)\right)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varphi_\mu, A\psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)\right)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu(\varphi_\mu, \psi_\nu)(\psi_\nu, \varphi_\mu)\right)$$
$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu|(\varphi_\mu, \psi_\nu)|^2\right).$$

すべて $\geqq 0$ であるから，順序をかえて和をとってもよい：

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu|(\varphi_\mu, \psi_\nu)|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{\infty}|(\varphi_\mu, \psi_\nu)|^2\right)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu\|\psi_\nu\|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda_\nu.$$

したがってこの場合には，$\sum_{\mu=1}^{\infty}(A\varphi_\mu, \varphi_\mu)$ はふたたび $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に無関係であり，しかも固有値の和に等しい．それは $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \cdots\cdots$ に対して有限であるから，つねに有限である．すなわち，Spur(A) はふたたび一意的であるが，こんどは有限である．

したがって，スプールの計算は両方の場合に正当化された．

なお，Spur(A) および $\sum(A)$ にかんする二，三のみつもりを与えよう．有限な $\sum(A)$ をもつすべての A に対して

$$\|Af\|\leqq\sqrt{\sum(A)}\cdot\|f\|$$

が，また有限な Spur(A) をもつすべての定符号（エルミート）の A に対しては

$$\|Af\|\leqq\mathrm{Spur}(A)\cdot\|f\|$$

が成り立つ．さらに A を定符号，Spur$(A)=1$，そして $\|\varphi\|=1$ である適当な φ に対して

$$\|A\varphi\|^2\geqq 1-\varepsilon \quad あるいは \quad (A\varphi, \varphi)\geqq 1-\varepsilon$$

としよう．

$$(A\varphi, \varphi)\leqq\|A\varphi\|\cdot\|\varphi\|=\|A\varphi\|$$

のために，第2から第1が導かれるから（$1-\varepsilon$ のかわりに $(1-\varepsilon)^2\geqq 1-2\varepsilon$ と

し，したがってεのかわりに 2ε とおいて)，第2の方だけを考えればよい．

ψはφに直交し，$\|\psi\|=1$ であるとしよう．そのとき $\chi_1=\varphi$，$\chi_2=\psi$ であるような規格化された完全直交系 $\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ を見出すことができるから，

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\|A\chi_\mu\|^2\begin{cases}=\sum(A)\leqq(\mathrm{Spur}(A))^2=1\\ \geqq\|A\varphi\|^2+\|A\psi\|^2\geqq 1-2\varepsilon+\|A\psi\|^2,\end{cases}$$

$$\|A\psi\|^2\leqq 2\varepsilon,\quad \|A\psi\|\leqq\sqrt{2\varepsilon}.$$

これからφに直交する任意の f に対して，

$$\|Af\|\leqq\sqrt{2\varepsilon}\|f\|$$

であることが導かれる．$\left(f=0\right.$ に対してはあきらか，その他のときは $\left.\psi=\dfrac{1}{\|f\|}\cdot f\right)$ さらに，

$$(Af,\ g)=(f,\ Ag)$$

に注意すれば，つぎのようにいうことができる：fあるいはgがφに直交すれば，

$$|(Af,\ g)|\leqq\sqrt{2\varepsilon}\cdot\|f\|\cdot\|g\|$$

である．

いま f, g を任意であるとすると，

$$f=\alpha\varphi+f',\quad g=\beta\varphi+g'$$

である．ここで f', g' はφに直交し

$$\alpha=(f,\ \varphi),\quad \beta=(g,\ \varphi)$$

である．それゆえ

$$(Af,\ g)=\alpha\bar{\beta}(A\varphi,\ \varphi)+\alpha(A\varphi,\ g')+\bar{\beta}(Af',\ \varphi)+(Af',\ g')$$

であり，したがって，

$$(A\varphi,\ \varphi)=c$$

とおくと

$$|(Af,\ g)-c\alpha\bar{\beta}|\leqq|\alpha|\cdot|(A,\ g')|+|\beta|\cdot|(Af',\ \varphi)|+|(Af',\ g')|.$$

そして，うえのみつもりによって，

$$\begin{aligned}|(Af,\ g)-c\alpha\bar{\beta}|&\leqq\sqrt{2\varepsilon}\cdot(|\alpha|\cdot\|g'\|+|\beta|\cdot\|f'\|+\|f'\|\cdot\|g'\|)\\&\leqq\sqrt{2\varepsilon}\cdot(|\alpha|+\|f'\|)(|\beta|+\|g'\|)\\&\leqq 2\sqrt{2\varepsilon}\cdot\sqrt{|\alpha|^2+\|f'\|^2}\sqrt{|\beta|^2+\|g'\|^2}\\&=2\sqrt{2\varepsilon}\cdot\|f\|\cdot\|g\|.\end{aligned}$$

他方,

$$(Af,\ g)-c\alpha\bar{\beta}=(Af,\ g)-c(f,\ \varphi)(\varphi,\ g)=((A-cP_{[\varphi]})f,\ g)$$

である. したがって一般に

$$|((A-cP_{[\varphi]})f,\ g)|\leqq 2\sqrt{2\varepsilon}\|f\|\cdot\|g\|$$

が成り立つから, II.9 で知ったように, また

$$\|(A-cP_{[\varphi]})f\|\leqq 2\sqrt{2\varepsilon}\|f\|$$

である. $f=\varphi$ のときに, これはつぎの関係を意味する ($c=(A\varphi,\ \varphi)$ は実で $\geqq 0$):

$$\|A\varphi-c\varphi\|\leqq 2\sqrt{2\varepsilon},$$

$$c=\|c\varphi\|\begin{cases}\leqq\|A\varphi-c\varphi\|+\|A\varphi\|\leqq 2\sqrt{2\varepsilon}+1\\ \geqq-\|A\varphi-c\varphi\|+\|A\varphi\|\geqq -2\sqrt{2\varepsilon}+(1-\varepsilon),\end{cases}$$

$$1-(\varepsilon+2\sqrt{2}\,\varepsilon)\leqq c\leqq 1+2\sqrt{2\varepsilon}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\|(A-P_{[\varphi]})f\|&\leqq\|(A-cP_{[\varphi]})f\|+\|(c-1)P_{[\varphi]}f\|\\&\leqq 2\sqrt{2\varepsilon}\cdot\|f\|+(\varepsilon+2\sqrt{2\varepsilon})\|P_{[\varphi]}f\|\\&\leqq(\varepsilon+4\sqrt{2\varepsilon})\cdot\|f\|.\end{aligned}$$

したがって, $\varepsilon\to 0$ のとき A は一様に $P_{[\varphi]}$ に収斂する.

最後に, 物理的な応用は $\Re_\infty$ の実現 F_Z および F_Ω においておこなわれるであろうから, これらにおける Spur(A) および $\sum(A)$ を考察しておく.

F_Z(有限な $\sum_{\mu=1}^{\infty}|x_\mu|^2$ をもつすべての $\{x_1,\ x_2,\cdots\cdots\}$ の集合) においては, A は行列 $\{a_{\mu\nu}\}$ によって記述される:

$$A\{x_1,\ x_2,\cdots\cdots\}=\{y_1,\ y_2,\cdots\cdots\},\quad y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}x_\nu.$$

$\{1,\ 0,\ 0,\cdots\cdots\}$, $\{0,\ 1,\ 0,\cdots\cdots\}$, $\cdots\cdots$ は 1 つの規格化された完全直交系 φ_1, φ_2, $\cdots\cdots$ を作り,

$$A\varphi_\mu=\{a_{1\mu},\ a_{2\mu},\ \cdots\cdots\}=\sum_{\rho=1}^{\infty}a_{\rho\mu}\varphi_\rho$$

である. したがって

$$(A\varphi_\mu,\ \varphi_\mu)=a_{\mu\mu},$$

$$\|A\varphi_\mu\|^2=\sum_{\rho=1}^{\infty}|a_{\rho\mu}|^2.$$

これからただちに

$$\mathrm{Spur}(A)=\sum_{\mu=0}^{\infty}a_{\mu\mu},\quad \sum(A)=\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}|a_{\mu\nu}|^2$$

が導かれる.

F_Ω (Ω において定義された，有限な

$$\int_\Omega |f(P)|^2 dv$$

をもつすべての $f(P)$ の集合）においては，われわれは積分作用素

$$Af(P)=\int_\Omega a(P,\ P')f(P')dv'$$

($a(P,\ P')$ は Ω で定義された 2 変数の函数，A の "積分核"，I.4 を見よ）だけを考察する．$\varphi_1(P)$, $\varphi_2(P)$, …… をある 1 つの規格化された完全直交系とすると，

$$\mathrm{Spur}(A)=\sum_{\mu=\cdot}^{\infty}(A\varphi_\mu(P),\ \varphi_\mu(P))$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_\Omega\left[\int_\Omega a(P,\ P')\varphi_\mu(P')dv'\right]\overline{\varphi_\mu(P)}dv$$

である．一般に（II.2 の定理 7. β）を $g(P)$ に適用して）

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\int_\Omega \overline{g(P')\varphi_\mu(P')}dv'\right)\varphi_\mu(P)=\overline{g(P)},$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\int_\Omega g(P')\varphi_\mu(P')dv'\right)\overline{\varphi_\mu(P)}=g(P)$$

であるから，

$$\mathrm{Spur}(A)=\int_\Omega a(P,\ P)dv$$

が成り立つ．さらに

$$\sum(A)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_\Omega\left|\int_\Omega a(P,\ P')\varphi_\mu(P')dv'\right|^2 dv$$

が成り立つから，

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\int_\Omega g(P')\varphi_\mu(P')dv'\right|^2=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left|\int_\Omega \overline{g(P')}\,\overline{\varphi_\mu(P')}dv'\right|^2$$

$$=\int_\Omega |\overline{g(P')}|^2 dv'=\int_\Omega |g(P')|^2 dv'$$

(II.2 定理 7. γ)) によって，

$$\sum(A)=\int_\Omega\int_\Omega|a(P,\ P')|^2dvdv'$$

となる.

つぎの事実がわかる：Spur(A), $\sum(A)$ は，I.4 で数学的には実にいかがわしい技巧を使って求めようと努めたところのものを実現している：すなわち F_Z から F_Ω に移るときに $\sum_{\mu=1}^{\infty}$ …… は $\int_\Omega$ ……dv によっておきかえられる，ということである.

これでわれわれはエルミート作用素にかんする数学的詳論を終る．数学に関心をもつ読者は，この主題についてさらに詳しいことを，それぞれの文献によって知ることができる[116].

116) この詳論のあいだにあげた原論文のほかには，Hellinger および Toeplitz の注33) にあげた Enzyklopädie の論稿が第1にあげらるべきである.

III. 量子力学の統計

1. 量子力学の統計的命題

第 II 部の数学的詳論によって中断された量子力学の理論の分析に帰ることにしよう．まえに述べたのは量子力学がエネルギーという特定の物理量のあらゆる可能な値をどのようにして決定するか，ということだけであった．——それはエネルギー作用素 H の固有値（すなわち，そのスペクトルの数値）である．ところが，その他の量の値について，ならびにいくつかの量のとる値のあいだの因果的あるいは統計的な関係について量子力学がいかなることを主張できる理論であるか，は論じられなかった．こんどはこれらの点に関してこの理論が主張するところに注目しなければならない．そのさい波動力学の記述の仕方を基礎にとる．2つの理論の同等性はすでに確められているところだから．

明らかにこの記述の仕方においては，系の状態について主張しようと思うことはすべてその波動函数 $\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)$ からとりださなければならない（系は k 個の自由度をもち，$q_1, \cdots\cdots, q_k$ はその状態空間の座標であるとする）．しかもそのさい系の定常状態（φ が H の固有函数であるような量子軌道；$\varphi\mathrm{H}=\lambda\varphi$, I. 3 を見よ）に限らないで，系のすべての状態——すなわち，(Schrödinger の時間を含む微分方程式 $\mathrm{H}\varphi=-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi$ にしたがって変化するような〔I. 2 参照〕) 波動函数φ——を許容する． さて状態φにある系についていかなる命題を主張することができるのであろうか？

まず第1に認められることとして，φは (I. 3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots\cdots dq_k=1$$

によって，すなわちわれわれのいまの術語でいうと，有限な

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots\cdots dq_k$$

をもつすべての $f(q_1\cdots\cdots q_k)$ が作るヒルベルト空間 $\mathfrak{R}_\infty$ の (F_Ω の!) 点として，

$$\|\varphi\|=1$$

によって，規格化されていた．すなわち，それはヒルベルト空間のなかの単位

球の表面になければならない[117]. われわれはすでに, φの定数の(すなわち $q_1, \cdots\cdots, q_k$ に無関係な)因子は物理的に意味がないことを知っている(すなわち, aをある複素数としたとき, φを $a\varphi$ でおきかえること, 規格化 $\|\varphi\|=1$ のために $|a|=1$ でなければならない). なお, φ はその系の状態空間の座標 $q_1, \cdots\cdots, q_k$ のほかに時間 t にも依存することに注意しよう. しかしながらヒルベルト空間はただ $q_1, \cdots\cdots, q_k$ に関してのみ作られており(なぜなら規格化もこれらに関してだけ行われる), t への依存はここでは考えにいれなくてもよく, むしろ t はパラメーターとみなされるべきである. したがってφは $\Re_\infty$ の点として, t に依存するが $q_1, \cdots\cdots, q_k$ には無関係である: というのは $\Re_\infty$ の点としてそれは $q_1 \cdots\cdots q_k$ にかんする函数のふるまい全体を代表するからである. このことを考慮して $\Re_\infty$ の点とみなされるときには, しばしばφにパラメーター t を φ_t のように明示することがある.

さて状態

$$\varphi=\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)$$

を考察しよう. この場合主張することができる統計的命題はつぎのとおりである: 系は確率密度

$$|\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)|^2$$

でもって状態空間の点 $q_1, \cdots\cdots. q_k$ にある. ——いいかえると状態空間の部分 Vに系があるという確率は,

$$\int_V \cdots\cdots \int |\varphi(q_1, \cdots\cdots, q_k)|^2 dv$$

である(これは量子力学の統計的性格が認識された, 最初のそしてもっとも簡単な例の1つである[118]: なおこの命題と Schrödinger の電荷分布の仮定とのあいだの関係は明らかである, I. 2 をみよ). さらに, 系のエネルギーの作用

---

117) 幾何学的な類比によって, $\Re_\infty$ における中心が φ_0 で半径が r の球は,

$$\|f-\varphi_0\| \leqq r$$

のような点の集合でなければならない. その内部は

$$\|f-\varphi_0\| < r$$

の集合であり, その表面は

$$\|f-\varphi_0\| = r$$

の集合である. 単位球に対しては $\varphi_0=0$, $r=1$ である.

118) 状態φにある系のふるまいにかんする最初の統計的命題は M. Born に始まる. さらに立ちいった研究は Dirac および Jordan による. 注 8) および 2) の引用文献を参照.

素をHとしよう．そしてこの作用素が固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ および固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をもつならば，状態 φ におけるエネルギーの値が λ_n である確率は

$$\left|\int\cdots\cdots\int\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\varphi_n(q_1\cdots\cdots q_k)}dq_1\cdots\cdots dq_k\right|^2$$

に等しい（注 118）にあげた論文を参照）．つぎにこの2つの命題を変形し，統一的な形にまとめようと思う．

V を k 次元の直方体

$$q_1'<q_1\leqq q_1'',\ \cdots\cdots,\ q_k'<q_k\leqq q_k''$$

とし，この区間 $\{q_1', q_1''\}, \cdots\cdots, \{q_k', q_k''\}$ をそれぞれ $I_1, \cdots\cdots, I_k$ となづけよう．$q_1, \cdots\cdots, q_k$ はそれぞれ作用素 $q_1\cdots\cdots, \cdots\cdots, q_k\cdots\cdots$ をもつ．これらに属する単位の分解はつぎのように定義される（II. 8 参照）：$q_j(j=1, \cdots\cdots, k)$ に属するものを $E_j(\lambda)$ とよぶと，

$$E_j(\lambda)f(q_1\cdots\cdots q_k)=\begin{cases}f(q_1\cdots\cdots q_k), & q_j\leqq\lambda \text{ のとき，}\\ 0 &, q_j>\lambda \text{ のとき，}\end{cases}$$

である．一般につぎのような表現を導入する：$F(\lambda)$ が単位の分解であり，I が区間 $\{\lambda', \lambda''\}$ であるとき

$$E(I)=F(\lambda'')-F(\lambda').$$

$(\lambda'\leqq\lambda'',\ F(\lambda')\leqq F(\lambda'')$ によってこれは射影作用素である）．系がうえの V のなかにある，すなわち q_1 が I_1 に，……，q_k が I_k にあるという確率は

$$\int_{q_1'}^{q_1''}\cdots\cdots\int_{q_k'}^{q_k''}|\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots\cdots dq_k$$

$$=\int\cdots\cdots\int|E_1(I_1)\cdots\cdots E_k(I_k)\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)|^2dq_1\cdots\cdots dq_k$$

に等しい（なぜなら $E_1(I_1)\cdots\cdots E_k(I_k)\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ は I_1 のなかの $q_1, \cdots\cdots I_k$ のなかの q_k に対しては $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ に等しく，その他の場合には0に等しいから）．すなわち

$$=\|E_1(I_1)\cdots\cdots E_k(I_k)\varphi\|^2.$$

第2の場合として，エネルギーが $\{\lambda', \lambda''\}$ という区間 I にある確率を考察する．Hに属する単位の分解 $E(\lambda)$ は

$$E(\lambda)=\sum_{\lambda_n\leqq\lambda}P_{[\varphi_n]}$$

と定義される（II. 8 をみよ）．したがって

$$E(I)=E(\lambda'')-E(\lambda')=\sum_{\lambda'<\lambda_n\leqq\lambda''}P_{[\varphi_n]}$$

である．ただ $\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots$ だけがエネルギーの値として問題になるのであるから，求める確率は，$\lambda'<\lambda_n\leqq\lambda''$ であるようなすべての λ_n の確率の和である．したがって：

$$\sum_{\lambda'<\lambda_n\leqq\lambda''}\left|\int\cdots\cdots\int\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)\overline{\varphi_n(q_1\cdots\cdots q_k)}dq_1\cdots\cdots dq_k\right|^2$$
$$=\sum_{\lambda<\lambda_n\leqq\lambda''}|(\varphi,\ \varphi_n)|^2=\sum_{\lambda'<\lambda_n\leqq\lambda''}(P_{[\varphi_n]}\varphi,\ \varphi)$$
$$=\left(\left\{\sum_{\lambda'<\lambda_n\leqq\lambda''}P_{[\varphi_n]}\right\}\varphi,\ \varphi\right)=(E(I)\varphi,\ \varphi)$$
$$=\|E(I)\varphi\|^2.$$

こうしてどちらの場合にも同じ1つの結果に到達した．それはつぎのように定式化される：

（**W.**） それぞれ作用素 $R_1,\cdots\cdots,R_l$ をもつ物理量[119]が，状態 φ においてそれぞれ区間 $I_1,\cdots\cdots,I_l$ のなかの値をとる確率は

$$\|E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)\varphi\|^2$$

である．ここで $E_1(\lambda),\cdots\cdots,E_l(\lambda)$ はそれぞれ $R_1,\cdots\cdots,R_l$ に属する単位の分解である．

第1の場合は $l=k,\ R_1=q_1\cdots\cdots,\ \cdots\cdots,R_k=q_k\cdots\cdots$， 第 2 の場合は $l=1$, $R_1=\mathrm{H}$ に対応する．われわれはこの命題 **W.** が一般に成り立つものと仮定しよう．それは事実上これまでに述べられた量子力学の統計的命題のすべてを包含する．

それの妥当性に対する1つの制限はつねに必要である．問題を仮定するさいに $R_1,\cdots\cdots,R_l$ の順序はまったくどうでもよいのであるから，それは結果においてもそうでなければならない．すなわち $E_1(I_1),\cdots\cdots,E_l(I_l)$ あるいはまたすべての $E_1(\lambda_1),\cdots\cdots,E_l(\lambda_l)$ が交換可能でなければならない．II. 10 によるとこのことは，$R_1,\cdots\cdots,R_l$ がおたがいに交換可能であることを意味する．この条件は $q_1\cdots\cdots,\ \cdots\cdots,q_k\cdots\cdots$ に対してはみたされており，$l=1$, $R_1=\mathrm{H}$ に対しては問題にすらならない．

119） 各物理量に1つのエルミート作用素を対応させるこの対応についてはなお IV. 1 でより詳細に述べる．さしあたり，I. 2 にもとづいて，座標には作用素 $q_1\cdots\cdots,\ \cdots\cdots,q_k\cdots\cdots$ が，運動量には作用素 $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1},\cdots\cdots,\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}$ が，そしてエネルギーには“エネルギー作用素”H が対応することがわかっている．

したがって W. を一般に交換可能な $R_1, \cdots\cdots, R_l$ に対して要請する．そのときには $E_1(I_1), \cdots\cdots, E_l(I_l)$ は交換可能であり，したがって $E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)$ は射影作用素（II.4 の定理 *14*），それゆえうえの確率は

$$W=\|E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)\varphi\|^2=(E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)\varphi,\ \varphi)$$

である（II.4 の定理 *12*）．

先へ進むまえに，W. にかんするいくつかの性質を証明しなければならない．それらは，どんな統計的理論もそれが意味をもつためにはそなえていなければならない性質である．

1. 主張をどんな順番に並べるかはどうでもよい．

2. 意味をもたない主張——すなわち，区間 I_j が $\{-\infty, +\infty\}$ に等しいというような主張は W を変えることなしにつけ加えることができる．なぜなら，それは因子

$$E_j(I)=E(+\infty)-E(-\infty)=1-0=1$$

をもたらすだけだからである．

3. 確率の加法定理が成り立つ．つまり，区間 I_j を2つの区間 I_j', J_j'' に分割したとき，もとの確率はこの2つの新しい確率の和である．なぜならば，I_j, I_j', I_j'' をそれぞれ $\{\lambda', \lambda''\}, \{\lambda', \lambda\}, \{\lambda, \lambda''\}$ とすると，

$$E(\lambda'')-E(\lambda')=(E(\lambda)-E(\lambda'))+(E(\lambda'')-E(\lambda)).$$

すなわち

$$E(I_j)=E(I_j')+E(I_j'')$$

であり，このことは，うえにあたえた W の2番目の形（それは $E_1(I_1)\cdots\cdots E_j(I_j)\cdots\cdots E_l(I_l)$ について線型である）に留意すると，確率の加法性をあたえる．

4, 不合理な主張（1 つの I_j が空）に対しては

$$W=0.$$

なぜならば，そのときには対応する $E_j(I_j)$ は $=0$ であるから．自明な主張（すべての I_j が $\{-\infty, +\infty\}$ に等しい）に対しては

$$W=1.$$

なぜなら，そのときにはすべての $E_j(I_j)=1$, $W=\|\varphi\|^2=1$ であるから．また，II.4 の定理 *13* によってつねに

$$0\leqq W\leqq 1.$$

最後に，量 R_j のとりうる値はそれの固有値，すなわちそのスペクトルの数

値だけであるという命題を $W.$ が含んでいることを述べておく，なぜならば，もし $\{\lambda', \lambda''\}$ に等しい区間 I_j がスペクトルの外にあるならば，$E_j(\lambda)$ はそのなかで定数であり，それゆえ

$$E_j(I_j)=E_j(\lambda'')-E_j(\lambda')=0.$$

これから

$$W=0$$

が結論される．

さて，$l=1$ とおき，R_1 を R と表わすことにしよう．R に対応する物理量を $\mathfrak{R}$ とよぼう（注 119）を参照）．$F(\lambda)$ をある函数としたとき，$F(\mathfrak{R})$ の期待値を計算しなければならない．

この目的のために，区間 $\{-\infty, +\infty\}$ を部分区間

$$\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

の列に分ける．$\mathfrak{R}$ が $\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ にある確率は

$$(\{E(\lambda_{n+1})-E(\lambda_n)\}\varphi, \varphi)=(E(\lambda_{n+1})\varphi, \varphi)-(E(\lambda_n)\varphi, \varphi)$$

であり，したがって $F(\mathfrak{R})$ の期待値は，λ_n' を $\{\lambda_n, \lambda_{n+1}\}$ の適当な中間値としたとき，

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(\lambda_n')\{(E(\lambda_{n+1})\varphi, \varphi)-(E(\lambda_n)\varphi, \varphi)\}$$

となる．この和は，分割 $\cdots\cdots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots$ をさらに細かくしてゆくときに，スチェルチェス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)d(E(\lambda)\varphi, \varphi)$$

に収斂する．したがってまた，うえの期待値もこの積分に等しい．II. 8 における作用素の函数の一般的な定義にもとづいて，この積分は

$$(F(R)\varphi, \varphi)$$

に等しい．かようにしてつぎの結果がえられる．

(E_1.) $\mathfrak{R}$ をある物理量，R をその作用素（注 119）をみよ），そして $F(\lambda)$ を任意の函数とする．そのとき，状態 φ における $F(\mathfrak{R})$ の期待値について

$$\mathrm{Erw}(F(\mathfrak{R});\varphi)=(F(R)\varphi, \varphi)$$

が成り立つ．

とくに $F(\lambda)=\lambda$ とおけば：

(E_2.) $\mathfrak{R}$, R をまえと同じとするとき，状態 φ における $\mathfrak{R}$ の期待値について

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R};\ \varphi)=(R\varphi,\ \varphi)$$

が成り立つ.

以下では **W.**, **E₁.**, **E₂.**, のあいだの関係を研究する.

われわれは **W.** から **E₁.** を，そして **E₁.** から **E₂.** を導いた.

$F(\mathfrak{R})$ の作用素を S でもって表わすと，**E₁.**, **E₂.** の比較からすべての状態 φ，すなわち $\|\varphi\|=1$ であるすべての φ に対して,

$$(S\varphi,\ \varphi)=(F(R)\varphi,\ \varphi)$$

がえられる. それゆえ一般に

$$(Sf,\ f)=(F(R)f,\ f)$$

($f=0$ に対しては明らか，その他の場合は $\varphi=\frac{1}{\|f\|}\cdot f$) であり，したがってまた

$$(Sf,\ g)=(F(R)f,g)$$

である (f を $\frac{f+g}{2}$ および $\frac{f-g}{2}$ でおきかえ，差をとれば，実数部分が等いことがわかる：f, g のかわりに if, g とおいて虚数部分のそれがえられる).

したがって

$$S=F(R)$$

でなければならない. われわれはこの重要な結果をとくに定式化する：

(**F.**) 量 $\mathfrak{R}$ が作用素 R をもつならば，量 $F(\mathfrak{R})$ は作用素 $F(R)$ をもたなければならない.

F. を仮定すると，明らかに **E₁.** は **E₂.** から導かれる.

したがって (**F.** の仮定のもとに) **E₁.** と **E₂.** は同等な命題である. こんどはそれらがまた **W.** に同等であることを示そうと思う. それらは **W.** から導かれるから，**W.** が **E₁.** あるいは **E₂.** から導かれることを証明するだけでよい.

$R_1, \cdots\cdots, R_l$ を，それぞれ量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ に属する交換可能な作用素としよう. II. 10 によってそれらは1つのエルミート作用素 R の函数である：

$$R_1=F_1(R), \cdots\cdots, R_l=F_l(R).$$

R もまた1つの量 $\mathfrak{R}$ に属すると仮定する (したがってわれわれは各々の量 $\mathfrak{R}$ に1つの〔超極大な〕エルミート作用素 R が属し，またその逆も成り立つという仮定をするのである. 注 119) および IV. 2 をみよ). そうすると，**F.** によって,

$$\mathfrak{R}_1=F_1(\mathfrak{R}), \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l=F_l(\mathfrak{R}).$$

さて $I_1, \cdots\cdots, I_l$ を **W.** のなかに現われる区間とし

$$G_j(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda \text{ が } I_j \text{ にあるとき,}\\ 0, & \text{その他のとき } (j=1, \cdots\cdots, l)\end{cases}$$

とする.

$$H(\lambda)=G_1(F_1(\lambda))\cdots\cdots G_l(F_l(\lambda))$$

とおき,

$$\mathfrak{S}=H(\mathfrak{R})$$

という量を作ろう.

もし $\mathfrak{R}_j$, すなわち $F_j(\mathfrak{R})$ が I_j にあるならば, $G_j(F_j(\mathfrak{R}))$ は1に等しく, その他の場合には0に等しい. したがって $\mathfrak{S}=H(\mathfrak{R})$ は, 各 $\mathfrak{R}_j$ が I_j のなかにあるときには $(j=1, \cdots\cdots, l)$ 1 に等しく, その他の場合には0に等しい. それゆえ, $\mathfrak{S}$ の期待値は, $\mathfrak{R}_1$ が I_1 にあり, $\cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ が I_l にあるという確率 W に等しい. したがって:

$$\begin{aligned}W&=\mathrm{Erw}(\mathfrak{S};\ \varphi)=(H(R)\varphi,\ \varphi)\\ &=(G_1(F_1(R))\cdots G_l(F_l(R))\varphi,\ \varphi)\\ &=(G_1(R_1)\cdots G_l(R_l)\varphi,\ \varphi).\end{aligned}$$

R_j に属する単位の分解をふたたび $E_j(\lambda)$ とよび, I_j を区間 $\{\lambda_j', \lambda_j''\}$ とする. そうすると, II.8 の終りで述べたことからして, そこでの表現を使えば,

$$\begin{aligned}G_j(\lambda)&=e_{\lambda''_j}(\lambda)-e_{\lambda'_j}(\lambda),\\ G_j(R_j)&=e_{\lambda''_j}(R_j)-e_{\lambda'_j}(R_j)\\ &=E_j(\lambda_j'')-E_j(\lambda'_j)=E_j(I_j)\end{aligned}$$

である. したがって

$$W=(E_1(I_1)\cdots E_l(I_l)\varphi,\ \varphi).$$

ところでこれはまさしく **W.** である.

E₂., **F.** はその形が簡単であるから, 理論全体をそのうえに建設すべき基礎とみなすのにとくに適している. われわれは, 確率にかんするもっとも一般的な可能な命題がそれらから導かれることを知った. ところでこの命題 **W.** については2つのことが注意をひく:

1. **W.** は統計的であって, 因果的ではない, いいかえるとそれは, 状態 φ において $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ がいかなる値をもつかをあたえるのではなく, ただいかなる確率をもってそれがすべての可能な値をとるかをあたえるのである.

2. **W.** の問題設定は任意の量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ については答えられないのであ

って，ただその作用素 $R_1, \cdots\cdots, R_l$ がおたがいに交換可能であるような量についてのみ答えられるのである．

この2つの事実の意味するところを論ずることが，われわれのつぎの課題である．

2. 統 計 的 解 釈

古典力学は因果的な理論である．すなわち，もしこの理論において，系の状態を正確に知れば――そのためには k 個の自由度があるときに $2k$ 個の数値を指定することが必要である：k 個の状態空間の座標 $q_1, \cdots\cdots, q_k$ およびそれらの k 個の時間微分 $\dfrac{\partial q_1}{\partial t}, \cdots\cdots, \dfrac{\partial q_k}{\partial t}$，あるいはそれのかわりに k 個の運動量 $p_1, \cdots\cdots, p_k$――，あらゆる物理量（エネルギー，角運動量，その他）の値を正確かつ一意的に確定した数値としてあたえることができる．にもかかわらず，古典力学の統計的な取扱い方も存在する．けれどもこれはいわばぜいたくであり，附加物である：つまり $2k$ 個の決定要素（$q_1, \cdots\cdots, q_k, p_1, \cdots\cdots, p_k$）のすべてを知らないでそれらのうちのいくつかだけを知るとき，そして場合によっては，これらをもまったく正確には知らないときには，未知のままになっている決定要素についてなんらかの方法で平均をとることによって，少くとも統計的な命題をすべての物理量について主張することができる．同様のことは系のより以前の，あるいは以後の状態に対しても正しい：時刻 $t=t_0$ における $q_1, \cdots\cdots, q_k, p_1, \cdots\cdots, p_k$ を知れば，古典力学の運動方程式を使ってあらゆる他の時刻 t に対して（因果的に）それらを計算することができる；それらのうちの1部分だけを知るときには，残りのものについて平均をとらなければならないし，他の時刻に対しては，ただ統計的命題しか述べることができない[120]．

われわれが量子力学において見出した統計的命題は異った性格をもってい

120） 気体運動論がこの事情のよい例示を提供する．1モル（16 g）の酸素は $6 \cdot 10^{23}$ 個の O_2 分子を含んでいるから，各 O_2 分子が2つのO原子からなること（それの内部構造は無視する．したがってそれは3個の自由度をもった質点としてとり扱われる）に注意すれば，それは $2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10^{23} = 36 \cdot 10^{23} = k$ 個の自由度をもつ力学系である．$2k$ 個の決定要素を用いてそれのふるまいを因果的にとらえることができるが，気体論はたった2個の変数しか使わない：すなわち圧力と温度であり，それらは，この $2k$ 個の決定要素のある複雑な函数である．

したがって気体論はただ統計的な（確率の）命題しか主張することができない．多くの場合これがほとんど因果的であること，すなわち確率が0あるいは1に近いことは，ことがらの原理的な性格をいささかも変えるものではない．

る．ここでは，k 自由度の場合，状態は波動函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_k)$ によって——すなわち適当に実現された $\Re_\infty$ の1つの点によって（$\|\varphi\|=1$，絶対値が1の数の因子は本質的でない）——記述される．したがって．われわれは φ を定めたあとは状態を完全に知っていると信ずるのであるが，しかしそれは物理量の値についてただ統計的な命題を可能にするのみなのである．

他方，この統計的な性格は物理量の値の予言に限られており，まえの，あるいはのちの状態 φ_t は

$$\varphi_{t_0}=\varphi$$

から因果的に計算される．時間を含む Schrödinger の微分方程式（I. 2 を見よ）がこれを可能にする：なぜなら

$$\varphi_{t_0}=\varphi,\quad \frac{k}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t=-\mathrm{H}\varphi_t$$

が φ_t の全経過を決定するからである．この微分方程式の解はあらわな形に書くことさえできる：

$$\varphi_t=e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\mathrm{H}}$$

（$e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\mathrm{H}}$ はユニタリーである）[121]．（この公式では H は時間に依存しない

121) $F_t(\lambda)$ が t に依存する函数で

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(\lambda)=G_t(\lambda)$$

であり，かつ H がエルミート作用素であるとすると，$\frac{\partial}{\partial t}$ は引算，割算および極限移行からなっているから，

$$\frac{\partial}{\partial t}F_t(\mathrm{H})=G_t(\mathrm{H})$$

である．

$$F_t(\lambda)=e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\cdot\lambda}$$

のときはこれは

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\mathrm{H}})=-\frac{2\pi i}{h}\mathrm{H}\cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\mathrm{H}}$$

をあたえる．したがって，これを φ に作用させれば求める微分方程式となる．

$$|F_t(\lambda)|=1,\quad F_t(\lambda)\cdot\overline{F_t(\lambda)}=1$$

によって

$$F_t(\mathrm{H})\cdot\{F_t(\mathrm{H})\}^*=1.$$

すなわち，われわれの

$$F_t(\mathrm{H})=e^{-\frac{2\pi i}{h}(t-t_0)\mathrm{H}}$$

はユニタリーである．$t=t_0$ に対して明らかに1に等しいから，

$$\varphi_{t_0}=\varphi$$

もみたされる．

ものと仮定されたが，時間に依存する H の場合にも微分方程式が1階であるから，φ_t は一意的に決定される——ただこのときには，これほど簡単な解の公式は存在しない.)

もしφと物理量の値とのあいだの関係の非因果的な性格を古典力学の例にならって説明しようとすれば，明らかにつぎのような解釈をとらなければならない：実際にはφはけっして状態を正確に決定するものではなく，それを完全に知るためには，なおより多くの数値を指定することが必要である．いいかえると系はφとならんでなお他の決定要素，より多くの座標をもつのである．かりにこれらすべてを知ったとすれば，すべての物理量の値を正確に，そして確定したものとしてあたえることができるであろう．——これに反してφだけを用いるのでは，ちょうど古典力学で $q_1, \cdots\cdots, q_k$, $p_1, \cdots\cdots, p_k$ の一部分にもとづいたときのように，ただ統計的な命題のみが可能である．この解釈はもちろん仮定的なものにすぎない．それは1つの試みである．この試みの価値は，φのほかにさらにつけ加えられる座標を実際に見出すことができるかどうか，そしてそれらの助けによって経験と一致し，しかもφだけをあたえた場合は（その他の座標について平均をとって）ふたたび量子力学の統計的な命題をあたえるような因果的な理論を建設することができるかどうかにかかっている.

これまでの研究で見出したのはφだけであって，それと並ぶべき，この仮説的な附加的な座標はまったくかくれた役割を演じているにちがいないのであるから，それは“かくれた座標,”あるいは“かくれたパラメーター”と普通よばれている．かくれたパラメーターによる説明は，古典力学においてすでに，多くの見かけ上統計的なふるまいを力学の因果的な基礎に還元してきた．——これについて特徴的なのは気体運動論である（注 120）を参照).

量子力学に対してかくれたパラメーターによるこの種の説明が問題になるかどうかは何度も論じられた問題である．それがいつかは肯定的な意味に答えられるであろうという見解は現在でも著名な擁護者をもっている．もしそれが正当であれば，この理論のこんにちの形式は暫定的なものという烙印を押されるであろう．なぜなら，もしそうだとすると状態の φ- 記述は本質的に不完全なものであるからである.

われわれはのちに（IV. 2.)，現在の理論を本質的に変えることなくかくれたパラメーターを導入することは疑いなく不可能である，ということを明らかにする．さしあたりつぎの事実にのみ言及しておこう．φは，その時間への依存

が因果的であって，統計的ではないという点で古典力学における $q_1, \cdots\cdots, q_k$, $p_1, \cdots\cdots p_k$ の部分系とはまったく本質的に異なる：φ_{t_0} は，うえで知ったようにすべての φ_t を一意的に決定する.

量子力学の命題のげんみつな分析によって，かくれたパラメーターの導入の可能性を客観的に検討することができるようになるまでは（それはうえにあげた個所でおこなう），このような説明の可能性を断念しよう．したがってわれわれは反対の立場をとる．すなわち，素過程を規制するところの自然法則（すなわち量子力学の諸法則）は統計的性質のものである，という事実をそのまま受けいれる．（巨視的世界の因果性はいずれにせよ，同時に作用する多数の素過程があるときに感知しうるようになるところの，“大数の法則”の平均化の働きによって現われるのである．注 120）の終りの注意および注 170）をみよ.）それゆえ，われわれは **W.**（あるいはまた **E₂.**）を素過程にかんする命題と認める.

量子力学の統計的命題を自然法則の真の形と認め，因果性の原理を放棄する，このような量子力学のつかみ方は，いわゆる統計的解釈である．それは M. Born に始まる[122]．それは現在矛盾なく実行しうる唯一の量子力学の解釈である――すなわち素過程にかんするわれわれの経験の総和なのである．以下で（この事情を徹底的に議論することができるようになるまで）われわれがしたがうのは，この解釈である.

3. 同時測定の可能性および測定可能性一般

III. 1. の終りで奇異な感じを与えるものとして注意した第2の事情は，ある量 $\mathfrak{R}$ が与えられた数値をとる確率だけでなく，多くの量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ に関する確率の関係までも **W.** が与えるということに関連していた――事実 **W.** はこれらの量が同時に与えられた値（より正確には，ある区間 $I_1, \cdots\cdots, I_l$ のあいだの値）をとる確率を与えるものであった（いずれもある与えられた状態 φ において）．しかし，これらの量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ は独特の制約をうけていた：すなわち，それらの作用素 $R_1, \cdots\cdots, R_l$ は変換可能でなければならない．他方，交換不可能な $R_1, \cdots\cdots, R_l$ の場合には，$\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ についての確率の相互関係についてなんの教示も **W.** からはえられない．**W.** はこれらの量のうち

122) Z. Physik Bd 37 (1926)．それ以後の発展はすべてこの解釈のうえに立っている（注 2）を見よ).

のある1つ以外は顧慮することなく，その量だけについて確率の分布を決めるのに利用できるだけであった.

これは **W.** の不完全さであり，もっと一般的な，そのような場合も包括する公式が存在するに違いない，とするのが最も真実らしく思われよう．なぜかというと量子力学が自然について統計的な教示しか与えないとしても，個々の量の統計を記述することだけでなく，多くの量の統計のあいだの相関を理解することもまた量子力学から期待してもよい最少限のことだからである.

しかし，このような解釈はちょっとみると正当と思われるけれども，そのような **W.** の一般化は可能でなく，しかも，この制約には形式的（理論の数学的道具の構造にもとづく）根拠とならんで，重要な物理的根拠があることがただちにわかる．この制約の必然性とその物理的な意味とは，要素的過程の本性への深い洞察を可能にするであろう.

この点を明瞭にするためには，**W.** によって（確率的な）主張がなされている $\mathfrak{R}$ という量の測定の過程が，量子力学の記述の仕方に対してどんな意味をもつかをたちいって調べなければならない.

第1に，Compton と Simon が量子力学の成立より以前におこなった重要な実験[123]に論及しなければならない．この実験では，光を電子によって散乱させ，そのあとで散乱された光と電子とをつかまえて，それらのエネルギーおよび運動量を測定することによって，この散乱過程を定量的に制御する．すなわち，光量子と電子とのあいだに衝突がおこなわれたのであるが，観測者は衝突後のそれらの軌道を観測することによって，弾性衝突の法則がみたされているかどうかを確めることができた.（電子についても光量子についても，運動エネルギー以外の形のエネルギーが授受されうるとは思われなかったから，弾性衝突以外のものは問題にならない．電子も光量子も，あらゆる経験にてらして，一義的に確定した構造をもっているようにみえる！衝突過程の計算はもちろん相対論的におこなわなければならない.[123]）実際，そのような計算による験証は可能である：というのは，衝突前の軌道は知れており衝突後のは観測されるからである——だがこれでは衝突の問題は過剰に決定される．この問題を力学的に解くには，実際，これら4つの軌道のうち2つと衝突の“中心線”（運動量の移動の方向）とで十分である——したがって，いずれにせよ3つの軌道で

123) Phys. Rev. Vol. **26** (1925)．また W. Bothe の綜合報告．Handbuch der Physik Bd. 23 (Quanten). Berlin 1926, Kap 3. とくに §78 を参照.

十分であり，第4の軌道は正否の標準である．実験の結果は，力学の衝突法則を完全に確証していた．

衝突法則が成り立つことを認め，衝突前の軌道は知れているものとすれば，この結果はまたつぎのように定式化することもできる：衝突の位置と中心線とを計算するためには，衝突後の光量子でも電子でもどちらかの軌道を測定すれば十分である．そうすると，Compton-Simon の実験は，これら2つの観測が同一の結果を与えることを示している．

一般化して述べると，同一の物理量（すなわち，衝突の位置の座標，あるいは中心線の方向）は2つの異った方法で（光量子および電子をつかまえて）測定され，その結果はつねに同一である．

これら2つの測定はまったく同時にはおこなわれない（光量子と電子はいちどには到着しない．測定装置を適当にならべることによって，どちらでもさきにつかまえることができる——もちろん $10^{-9}-10^{-10}$ 秒ていどのことであるが）．はじめの測定を M_1，あとのを M_2 とよび，測定される量を $\mathfrak{R}$ とする．そうするとここで本質的なのはつぎのことである：測定前には $\mathfrak{R}$，すなわち M_1, M_2 について統計的な命題しか述べることができないとしても（さきの注123）をみよ），M_1 と M_2 とのあいだの統計的相関は完全である（因果的）．すなわち，M_1 による $\mathfrak{R}$ の値と M_2 による値とは確実に等しい．したがって，測定 M_1, M_2 のまえにはどちらの測定結果もきわめて不確定であるが，M_1 をおこなったのちには，M_2 はまだおこなわれなくても，その結果は因果的一意的に確定している．

原理的なみかたからすれば，因果性あるいは非因果性それ自体としては3つの段階が考えられるということができる．第1に $\mathfrak{R}$ の値はまったく統計的でありうる．すなわち，ある測定の結果は統計的に予言できるだけである：そして，第1の測定ののちに第2の測定にとりかかるとしても，その結果は，第1の測定のさいに見出された値にかかわりなく，ふたたび散らばりをもつ——例えば，第1とまったく同じように散らばっているということがありうる[124]．第2に考えられるのは，$\mathfrak{R}$ の値は第1の測定のさいにこそ散らばっているが，それにすぐ続いておこなわれる測定は，第1の結果と一致する結果を与えるこ

124) Bohr, Kramers および Slater のたてた，要素的現象の統計理論はこのような考えを基礎としてつくられた．Z. Physik Bd. 24 (1924)．またさきの注 123) をみよ．Compton-Simon の実験はこのような把握の仕方に対する反ばくとみることができる．

とをよぎなくされる，ということである．第3に，$\mathfrak{R}$ ははじめから因果的に確定していることがありうる．

そうすると Compton-Simon の実験は，統計的理論にとって第2の場合だけが問題になることを示しているわけである．したがって系がはじめ $\mathfrak{R}$ の値を確実に予言することのできないような状態にあったとすれば，$\mathfrak{R}$ の測定 M（うえの例では M_1）によってこの状態は他の状態，つまり，$\mathfrak{R}$ の値が一意的に決っているような状態へ移される．M によって系が移った新しい状態は M の配置はもとより，それだけでなく M の測定結果（それは古い状態から因果的に予言することができない）にも依存している――なぜなら，新しい状態における $\mathfrak{R}$ の値はちょうどこの M の結果に等しくなければならないから．

いま，$\mathfrak{R}$ を，その作用素Rが純粋の点スペクトル $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ およびそれぞれの固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をもつような量としよう．したがって，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は規格化された完全直交系をつくる．さらに各固有値は単純である（すなわち，多重度 1: II. 6. をみよ）とする．すなわち $\mu \neq \nu$ に対して $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$. $\mathfrak{R}$ を測定してある値 λ^* を見出したとしよう．測定後の系の状態は何であろうか?

さきほど述べたことによれば，この状態φは，あらたに $\mathfrak{R}$ の測定をすれば確実に λ^* という結果がえられるようなものでなければならない（τ 秒のちにはφは

$$e^{-\frac{2\pi i}{h}\tau\cdot\mathsf{H}}\varphi$$

に変ってしまうから，この測定はすぐにおこなわなければならないことはもちろんである．III. 2. を参照．H はエネルギー作用素である）．

状態φにおける $\mathfrak{R}$ の測定が確実に λ^* という値を与えるのはどんなときか，ということの問題に対して，作用素Rを制限するような仮定なしに，より一般的な答えを与えようと思う．

$E(\lambda)$ はRに属する単位の分解，I は区間 $\{\lambda', \lambda''\}$ とする．われわれの仮定はつぎのようにも定式化される：I が λ^* を含まなければ，$\mathfrak{R}$ がI にある確率は0である――あるいは：λ^* がI に属する，すなわち $\lambda' < \lambda^* \leqq \lambda''$ のときには確率が1である．

W. によれば，これは

$$\|E(I)\varphi\|^2 = 1$$

を意味する．あるいは，$\|\varphi\| = 1$ だから

$$\|E(I)\varphi\|^2=\|\varphi\|$$

を意味する．$E(I)$ は射影作用素であり，また $1-E(I)$ もそうであるから，

$$\|\varphi-E(I)\varphi\|^2=\|\varphi\|^2-\|E(I)\varphi\|^2=0,$$

$$\varphi-E(I)\varphi=0,$$

$$E(\lambda'')\varphi-E(\lambda')\varphi=E(I)\varphi=\varphi$$

である（II. 4. 定理 *13*）．$\lambda'\to-\infty$ とすれば，

$$E(\lambda'')\varphi=\varphi,$$

$\lambda''\to+\infty$ とすれば

$$E(\lambda')\varphi=0,$$

を与える（II. 7. の S_1. をみよ）．したがって

$$E(\lambda)\varphi=\begin{cases}\varphi, & \lambda\geqq\lambda^* \text{ に対して,}\\ 0, & \lambda<\lambda^* \text{ に対して.}\end{cases}$$

ところで，II. 8. によれば，これはちょうど

$$R\varphi=\lambda^*\varphi$$

を特徴づけるものである．

$R\varphi=\lambda^*\varphi$ を証明するもう1つの方法は $\mathbf{E_1}$.（すなわち $\mathbf{E_2}$.）にもとづいている．$\mathfrak{R}$ が確かに λ^* という値をもつということは，$(\mathfrak{R}-\lambda^*)^2$ が期待値 0 をもつことを意味する．すなわち，

$$F(\lambda)=(\lambda-\lambda^*)^2$$

として，作用素 $F(R)$，したがって，$(R-\lambda^*\cdot 1)^2$ の期待値が 0，それゆえ，

$$\begin{aligned}((R-\lambda^*\cdot 1)^2\varphi,\ \varphi)&=((R-\lambda^*\cdot 1)\varphi,\ (R-\lambda^*\cdot 1)\varphi)\\ &=\|(R-\lambda^*\cdot 1)\varphi\|^2=\|R\varphi-\lambda^*\varphi\|^2=0\end{aligned}$$

でなければならない．すなわち，$R\varphi=\lambda^*\varphi$ である．

したがって，いま調べた特別の場合には

$$R\varphi=\lambda^*\varphi$$

でなければならないが，II. 6. で論じたように，その結果として λ^* は λ_μ の1つに等しくなければならず（$\|\varphi\|=1$ のために $\varphi\neq 0$），また

$$\varphi=a\varphi_\mu$$

である．なお

$$\|\varphi\|=\|\varphi_\mu\|=1$$

のために

$$|a|=1$$

でなければならない．したがって，a を落としても状態は変化しない．ゆえに，$\mu=1, 2, \cdots\cdots$ のどれかに対して

$$\lambda^*=\lambda_\mu,\quad \varphi=\varphi_\mu$$

である（λ^* についての結果は **W.** から直接導くこともできるが，φ についてはできない!）．

したがって R についてうえのような仮定をおけば，$\mathfrak{R}$ の測定の結果，ψ はそれぞれ測定値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ に対応する状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の1つに変換される．それゆえ，この転換の確率は測定して $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ をえる確率に等しく，したがって，**W.** から計算することができる．

$\mathfrak{R}$ の値が I のなかにあるための確率は，**W.** によれば，$\|E(I)\varphi\|$ である．そこで，II. 8. によれば，

$$E(I)=\sum_{\lambda_n\in I}P_{[\varphi_n]}$$

であることに注意すると，

$$W=\|E(I)\psi\|^2=(E(I)\psi,\ \psi)=\sum_{\lambda_n\in I}(P_{[\varphi_n]}\psi,\ \psi)$$
$$=\sum_{\lambda_n\in I}|(\psi,\ \varphi_n)|^2.$$

これから，λ_n に対する確率は $|(\psi,\ \varphi_n)|^2$ と推量されるだろう．I のなかにある唯一の λ_m がこの λ_n であるように I を選べば，それはうえの式から直ちに導かれる．そのほかの場合（すなわち，ほかの λ_m が λ_n に集積している）には，たとえばつぎのように推論できる：$F(\lambda)$ は $\lambda=\lambda_n$ に対しては 1，それ以外は 0 とすると，求める確率 W_n は $F(\boldsymbol{R})$ の期待値であるから，**E₂.**（あるいは **E₁.**）によって $(F(R)\psi, \psi)$ である．ところで，定義により（II. 8.）

$$(F(R)\psi,\ \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)d(\|E(\lambda)\psi\|^2)$$

であり，スチェルチェス積分の定義を想いだせば，これは，$E(\lambda)\psi$ が $\lambda=\lambda_n$ において連続（λ について!）のとき 0，一般には，（単調非減少の）λ の函数 $\|E(\lambda)\psi\|^2$ の点 $\lambda=\lambda_n$ における飛びに等しいことが容易にわかる．しかし，$\mathfrak{M}$ を

$$R\psi=\lambda_n\psi$$

のすべての解によって張られる閉じた線型多様体とすると，$(F(R)\psi,\ \psi)$ は $\|P_{\mathfrak{M}}\psi\|^2$ に等しい（II. 8. をみよ）．いまの場合 $\mathfrak{M}=[\varphi]$ であるから，

$$W_n=\|P_{[\varphi]}\psi\|^2=|(\psi,\ \varphi_n)|^2.$$

こうして，ある量 $\mathfrak{R}$ を測定すれば何が現れるかという問題は，それの作用素 R に対するうえのような仮定のもとで答えられたわけである．もちろん，“いかに”ということはさしあたり明らかにされないままである．ψ から状態 φ_1, φ_2, ……（ψ はこの飛躍の確率 $W_n=|(\psi, \varphi_n)|^2$, $n=1, 2.$ …… に関係するだけであるから，φ_1, φ_2…… は ψ に無関係である）の１つへの不連続で飛躍的な移行が，時間に依存する Schrödinger の微分方程式で記述されるような種類のものでないことは確かである．この方程式はいつも ψ の連続的な変化を媒介するが，そのような変化のさいには，最後の結果は一意的に決まり，かつ ψ に依存している（III. 2. で述べたことを参照）！ われわれは，この割れ目に橋をかけることはのちにまわすことにしよう[125]．

われわれはなお，R が純粋の点スペクトルをもつことをつねに仮定するが，しかし，すべての固有値が１重であることはもはや要求しない．すると，ふたたび φ_1, φ_2, …… および λ_1, λ_2, …… をつくることができるが，λ_n のうちには等しいものがあってもよい．$\mathfrak{R}$ の測定のあとには，

$$R\varphi=\lambda^*\varphi$$

であるような状態がきまって生ずる（λ^* は測定結果）．したがって λ^* は１つの λ_n に等しいが，φ についてはつぎのようにしかいえない：λ^* に等しい λ_n を $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}$, …… とすると（その数は有限または無限），

$$\varphi=\sum_\nu a_\nu\varphi_{n_\nu}$$

である（n_ν が無限に多いときには，$\sum_\nu |a_\nu|^2$ が有限でなければならない）．このような２つの φ が同一の状態を表わすのは，それが数因子だけしか異ならないとき，すなわち，比

$$a_1 : a_2 : \cdots\cdots$$

が同一であるときだけである．したがって，１個より多くの n_ν が存在するならば，すなわち，固有値 λ^* が多重であるときには，測定ののちの状態 φ は測定結果を知っても一意的に確定することができない．

λ^* の確率は（**W.** あるいは **E₁.** または **E₂.** により），さきほどとまったく同様にして

$$W(\lambda^*)=\sum_{\lambda_n=\lambda^*}|(\psi, \varphi_n)|^2=\sum_\nu|(\psi, \varphi_{n_\nu})|^2$$

---

125) この飛躍が，以前の Bohr の量子論における“量子飛躍”の仮定と類似していることを Jordan が注意した：Z. Physik, Bd. 40 (1924).

と算出される．

Rが純粋の点スペクトルをもたないときには，事情はつぎのようである．

$$Rf=\lambda f$$

のすべての解fは1つの閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}_\lambda$ を張り，すべての $\mathfrak{M}_\lambda$ は全体で $\overline{\mathfrak{M}}$ を張る．純粋の点スペクトルをもたないことを特徴づけるのは，

$$\overline{\mathfrak{M}} \neq \mathfrak{R}_\infty,$$

すなわち，

$$\overline{\mathfrak{N}}=\mathfrak{R}_\infty-\overline{\mathfrak{M}} \neq (0)$$

である（これについては，以下についてと同様 II.8. を参照）．$\mathfrak{M}_\lambda$ はたかだかλの1つの列に対してのみ $\neq(0)$．これらのλはRの点スペクトルを形づくる．$\mathfrak{R}$ を状態ψにおいて測定するとき，測定結果が λ^* となるための確率は

$$W(\lambda^*)=\|P_{\mathfrak{M}_{\lambda^*}}\psi\|^2=(P_{\mathfrak{M}_{\lambda^*}}\psi,\ \psi)$$

である；これをえるには，$\boldsymbol{E}_2$（あるいは $\boldsymbol{E}_1$）および函数

$$F(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda=\lambda^* \text{ に対して}\\ 0, & \lambda\neq\lambda^* \text{ に対して}\end{cases}$$

に基礎をおくところの，うえで使った推理法を適当に利用する．$\mathfrak{R}$ の値が，R の点スペクトル $\mathfrak{P}$ のどれか1つ λ^* であるための確率は，うえに対応して

$$W=\sum_{\mathfrak{P}\text{に属する}\lambda^*}(P_{\mathfrak{M}_{\lambda^*}}\psi,\ \psi)=(P_{\overline{\mathfrak{M}}}\psi,\ \psi)=\|P_{\overline{\mathfrak{M}}}\psi\|^2$$

である：これはまた，函数

$$F(\lambda)=\begin{cases}1, & \mathfrak{P} \text{ に属する } \lambda^* \text{ に対して}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

の助けをかりて直接導くこともできる．

ところで，$\mathfrak{R}$ の測定が精確におこなわれれば，そのあと

$$R\varphi=\lambda^*\varphi$$

となるような状態が存在し，したがって測定結果 λ^* は $\mathfrak{P}$ に属する——したがって精確な測定に成功する確率は（たかだか）$\|P_{\overline{\mathfrak{M}}}\psi\|^2$ である．しかるにこの数はつねに1というわけでなく，$\overline{\mathfrak{N}}$ に属する ψ に対しては0でさえある——したがって，精確な測定はいつも可能とは限らない．

量 $\mathfrak{R}$ は，純粋の点スペクトルをもつとき，そしてそのときにだけ，つねに（すなわち，あらゆる状態 ψ において）精確に測定することができる．したがって，点スペクトルをもたないときには，限られた精確さでしか測定することができない．すなわち，数直線 $-\infty<\lambda<+\infty$ を区間

$$\cdots\cdots, I^{(-2)}, I^{(-1)}, I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, \cdots\cdots$$

に分け（分点を $\cdots\cdots, \lambda^{(-2)}, \lambda^{(-1)}, \lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \cdots\cdots$

$$I^{(n)}=\{\lambda^{(n)}, \lambda^{(n+1)}\}$$

とする：最大の区間の長さ $\varepsilon=\mathrm{Max}(\lambda^{(n+1)}-\lambda^{(n)})$，あるいは分割の網の目の広さが測定の精度である），どの区間に $\mathfrak{R}$ があるかを決定するのである．この最後の段階は計算によってさらに追求することができる．すなわち，$F(\lambda)$ をつぎのような函数とする（λ_n' は $I^{(n)}$ の適当な中間値．それは各 $n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$ に対して任意にとることができるが，ひとたび定めたあとでは固定する）：

$$F(\lambda)=\lambda_n', \quad \lambda \text{ が } I^{(n)} \text{ にあるとき．}$$

そうすると，$\mathfrak{R}$ の近似的な測定は $F(\mathfrak{R})$ の精確な測定に等しくなる．ところで，

$$F(R)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)dE(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{\lambda^{(n)}}^{\lambda^{(n+1)}}F(\lambda)dE(\lambda)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n'\int_{\lambda^{(n)}}^{\lambda^{(n+1)}}dE(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_n'E(I^{(n)})$$

である．あきらかに，$E(I^{(n)})$ に属する閉じた線型多様体のすべての f に対して

$$F(R)f=\lambda'_nf.$$

すなわち，$F(R)$ に対してそれらの f は $\mathfrak{M}_{\lambda'_n}$ に含まれる．したがって

$$P_{\mathfrak{M}_{\lambda'_n}}\geqq(I^{(n)}).$$

ゆえに，

$$P_{\overline{\mathfrak{M}}}\geqq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_{\mathfrak{M}_{\lambda'_n}}\geqq\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(I^{(n)})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(E(\lambda^{(n+1)})-E(\lambda^{(n)}))$$

$$=1-0=1.$$

これから

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_{\mathfrak{M}_{\lambda'_n}}=P_{\overline{\mathfrak{M}}}=1, \quad P_{\mathfrak{M}_{\lambda'_n}}=E(I_n).$$

すなわち，$F(R)$ は純粋の点スペクトルをもち，それは λ'_n からできている．

したがって，$F(\mathfrak{R})$ は実際に精確に測定可能であり，その値が λ'_n である確率，すなわち $\mathfrak{R}$ が $I^{(n)}$ のなかにある確率は

$$\|P_{\mathfrak{M}_{\lambda_n}}\psi\|^2=\|E(I^{(n)})\psi\|^2$$

となり，$\mathfrak{R}$ に対する命題 W. に合致する.

この結果はもとより物理的に解釈することもできて，理論と通常の物理学的直観とがよく一致していることが認められる.

古典力学の考え方では（どんな量子条件もない），あらゆる状態においてすべての量 $\mathfrak{R}$ に完全に定まった値を帰属させる．しかし同時に，どのような考えられる測定装置も，人間の観察能力の不完全さのために（指針や写真乾板の黒化は限られた精度でしか読みとり，あるいは位置を定めることができない），あるけっしてゼロにならない誤差の限界内でしかこれらの値を与えることができない．この誤差の限界は，測定装置を十分精密化することによっていくらでも0に近づけられはする——しかし正確に0に等しくなることはない．量子力学においても，人々が物理量について（とくに量子力学の発見前には）つねにつくろうとするその直観的な像からして，量子化されないようなあらゆる量 $\mathfrak{R}$ について同じことがいえると期待されるであろう．例えば，電子のデカルト座標である（それは $-\infty$ と $+\infty$ のあいだのすべての値をとることができ，その作用素は連続スペクトルをもつ)．これに対して，(直観的な表象にもとづいて)“量子化” されているすべての量については逆になる．それは離散的な値しかとりえないから，“量子化された” 値のいずれが問題であるかについてなんの疑義も生じないだけの正確さで観測すれば十分である——そうすれば，その問題となった値が確かに絶対的に精確な値である．例えば，1つの水素原子についてそれが2番目に低いエネルギー準位に必要なよりも小さいエネルギーしかもたないことを知れば，それのもつエネルギーは絶対的に精確にわかる：それは最低のエネルギー準位である.

しかしながら，このように“量子化された”量と“量子化されていない”量とに分けることは，“行列理論” の諸関係がすでに示しているように（I. 2., および II. 6. をみよ)，純粋な点スペクトルをもつ作用素Rに対する量 $\mathfrak{R}$ とそうでない量への分割に対応している．そして，まさしくその前者に対して，そしてそれに対してだけ，絶対的に精確な観測の可能性が見出される．——他方，後者は任意の（しかしけっして絶対的ではない）精確さでしか観測することができないのである[126].

126) しかしながら，観測される系と測定装置との構造——すなわち，そこに働くすべての力の場など——は精確に知られており，状態，すなわち座標の瞬間的な値だけが

(ついでにいっておけば，序論においても I. 3. においても述べたところの，“普通でない”あるいはヒルベルト空間に属さない固有函数の導入——II. 8 とくに注 84), 86) を参照——は，まさにこの点で，現実を写しだすうえで，われわれの方法に劣るのである．というのは，そのような函数は連続スペクトルをもつ量が厳密にある値をとる状態が存在するかのような——そのようなものはけっして存在しないにもかかわらず——みせかけをもっているからである．われわれは，そのような函数の数学的根拠の薄弱さのほかに，このような根拠からも，こうした理想化はたとえそれがくり返し提唱されたものであるにしろ，拒否しなければならないと信ずるのである．)

こうして，ある量の測定のさいに生ずる経過についての問題はさしあたり結末がついたので，多くの量の同時測定の問題にむかうことができる．

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ はそれぞれ作用素 R, S をもつ2つの量とし，それらは同時に測定可能であると仮定する．ここからどんな結果がえられるであろうか？

まず，絶対的に精確な測定を要求する．したがって，R, S はともに純粋の点スペクトル $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ および $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をもたなければならない．これらに属する固有函数からなる，規格化された完全直交系をそれぞれ，

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \text{ および } \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$$

とする．

最も簡単な場合から始めることにして，まず，2つの作用素のうち1つ，例えばRは単純な固有値だけをもつ，すなわち，$m \neq n$ に対して $\lambda_m \neq \lambda_n$ であることを仮定する．

$\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{S}$ とを同時に測定すれば，そのあとには，$\mathfrak{R}$ も $\mathfrak{S}$ も確実に測定によってえられた値をもつような状態が生ずる．その値は例えば $\lambda_{\overline{m}}$, $\mu_{\overline{n}}$ であるが，生じた状態ψは

$$R\psi = \lambda_{\overline{m}}\psi, \quad S\psi = \mu_{\overline{n}}\psi$$

をみたさなければならない．さきの式から

求められるということが前提となっている．この（理想化のための）仮定があたらないときには，もちろんそのほかの不精確の源泉が存在する．不精確な測定についての記述のしかたにもいくらかの理想化がなされている：われわれは，そのような測定は，値が区間 $I=\{\lambda', \lambda''\}$, $\lambda' < \lambda''$ のなかにあるかどうかを絶対的な確かさで決定することであると仮定した．実際は限界 λ', λ'' がぼやけている．すなわち，ある確率でもってしか決定することができないのである．とはいえ，われわれの記述のしかたは，少くとも当面は，数学的に最も有用なように思われる．

$$\psi = \varphi_{\overline{m}}.$$

あとの式からは，$\mu_{\overline{n}}$ に等しい μ_n をすべてとりだして $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \cdots\cdots$ として

$$\psi = \sum_\nu a_\nu \psi_{n_\nu}.$$

最初にとった状態が φ であれば，$\lambda_{\overline{m}}$，$\varphi_{\overline{m}}$ の確率は

$$|(\varphi, \varphi_{\overline{m}})|^2.$$

それゆえ，$\varphi = \varphi_m$ のときは確実に $\overline{m} = m$，したがって各 m に対して，φ_m は μ_{n_ν} がすべて等しいとして $\sum_\nu a_\nu \psi_{n_\nu}$ に等しい．すなわち

$$S\varphi_m = \overline{\mu}\varphi_m \quad (\overline{\mu} = \mu_{n_1} = \mu_{n_2} = \cdots\cdots)$$

である，ということができる．ゆえに，$f = \varphi_m$ に対しては

$$RSf = SRf$$

が成り立ち（両辺とも $\lambda_m \overline{\mu} \varphi_m$ に等しい），したがってまたその1次結合に対しても，また，R, S が連続ならば，その集積点に対しても，すなわち，すべての f に対してこの式が成り立つ．したがって R, S は交換可能である．

R, S が連続でないときには，つぎのようにする：R, S に属する単位の分解 $E(\lambda), F(\mu)$ は

$$E(\lambda) = \sum_{\lambda_m \geqq \lambda} P_{[\varphi_m]}, \quad F(\mu) = \sum_{\mu_n \geqq \mu} P_{[\psi_n]}$$

によって定義される．ゆえに，うえの $\overline{\mu}$ に比べて $\mu \geqq$ あるいは $\mu <$ に応じて

$$F(\mu)\varphi_m = \varphi_m \text{ あるいは } = 0$$

である．さらに，$\lambda \geqq \lambda_m$ あるいは $< \lambda_m$ に応じて

$$E(\lambda)\varphi_m = \varphi_m \text{ あるいは } = 0.$$

したがって，いずれにせよすべての φ_m に対して

$$E(\lambda)F(\mu)\varphi_m = F(\mu)E(\lambda)\varphi_m$$

である——これからして，うえのように $E(\lambda)$ と $F(\mu)$ の交換可能性が，したがってまた（II. 10. により）R, S の交換可能性が導かれる．

ところが II. 10. によれば，R と S との共通の固有函数からなる規格化された完全直交系が存在する——すなわち，

$$\varphi_m = \psi_m$$

としてよい．$m \neq n$ に対して $\lambda_m \neq \lambda_n$ であるから，

$$F(\lambda) = \begin{cases} \mu_n, \quad \lambda = \lambda_n, \quad n = 1, 2, \cdots\cdots \text{ に対して,} \\ \text{それ以外に対しては任意,} \end{cases}$$

という函数 $F(\lambda)$ をつくることができて，

$$S=F(R),\ \text{すなわち}\ \mathfrak{S}=F(\mathfrak{R})$$

となる．すなわち，$\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{S}$ とは同時に測定可能であるばかりでなく，実に，$\mathfrak{S}$ が $\mathfrak{R}$ の函数であるために，$\mathfrak{R}$ の測定がまた $\mathfrak{S}$ の測定でもある．つまり $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{R}$ によって因果的に決まるのである[127]．

つぎに，R, S の固有値の多重度についてなんの仮定もおかない，いっそう一般的な場合へ移ろう．この場合は本質的に異った方法がつかわれる．

まず $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ という量を考えよう．$\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ の同時測定は $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の測定でもある：なぜかというと，測定結果を加え合わせれば $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の値を与えるからである．したがって，$\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の期待値はすべての状態 ψ において $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{S}$ の期待値の和である．このことは，$\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ がたがいに統計的に独立であるかどうか，または，それらのあいだに（どのような）相関があるかどうか，それとも，一方が他方を因果的に決定するかどうか，というようなことには無関係に成り立つことに注意する．それは，周知のように

和の期待値＝期待値の和

という法則が一般に成り立つからである．したがって，T を $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の作用素とすれば，この期待値は一方からいえば $(T\psi,\ \psi)$ であり，他方からいえば

$$(R\psi,\ \psi)+(S\psi,\ \psi)=((R+S)\psi,\ \psi)$$

である．すなわち，すべてのψに対して

$$(T\psi,\ \psi)=((R+S)\psi,\ \psi).$$

ゆえに，

$$T=R+S.$$

したがって $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ は作用素 $R+S$ をもつ[128]．同じく，$a\mathfrak{R}+b\mathfrak{S}$ は（a, b は実数）作用素 $aR+bS$ をもつことが示される（これは，$\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ および R, S を函数

$$F(\lambda)=a\lambda,\quad G(\mu)=b\mu$$

に代入すれば，さきほどの式からでも導かれる）．

---

127) 最後の主張を **W.** によって検討してみよ！ R あるいは S に属する単位の分解は II. 8 にしたがってつくられる．

128) この法則によれば $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の作用素は $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{S}$ の作用素の和である．これは同時に測定可能な $\mathfrak{R}$ と $\mathfrak{S}$ に対して証明されたのであるが，実はそれは任意の $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ に対して成り立つのである．その証明にはふれないでおく．——それはむしろ理論の基本的要請である．IV. 1. のおわり，および IV. 2. で述べられることを参照．

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ の同時測定はまた

$$\frac{\mathfrak{R}+\mathfrak{S}}{2},\ \left(\frac{\mathfrak{R}+\mathfrak{S}}{2}\right)^2,\ \frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{S}}{2},\ \left(\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{S}}{2}\right)^2,$$
$$\left(\frac{\mathfrak{R}+\mathfrak{S}}{2}\right)^2-\left(\frac{\mathfrak{R}-\mathfrak{S}}{2}\right)^2=\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S}$$

の測定でもある．だから，これらの量の作用素は（T が $\mathfrak{T}$ の作用素ならば，$F(\mathfrak{T})$ は $F(T)$ という作用素をもち，したがって $\mathfrak{T}^2$ は作用素 T^2 をもつということを利用すると），

$$\frac{R+S}{2},\ \left(\frac{R+S}{2}\right)^2=\frac{R^2+S^2+RS+SR}{4},\ \frac{R-S}{2},\ \left(\frac{R-S}{2}\right)^2$$
$$=\frac{R^2+S^2-RS-SR}{4},\ \left(\frac{R+S}{2}\right)^2-\left(\frac{R-S}{2}\right)^2=\frac{RS+SR}{2}$$

である．すなわち，$\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{S}$ は作用素

$$\frac{RS+SR}{2}$$

をもつ．これはあらゆる $F(\mathfrak{R})$, $G(\mathfrak{S})$（これらも一緒に測られる）に対しても成り立つから，$F(\mathfrak{R})\cdot G(\mathfrak{S})$ は

$$\frac{F(R)G(S)+G(S)F(R)}{2}$$

という作用素をもつ．

いま $E(\lambda)$, $F(\mu)$ を R, S に属する単位の分解とし，さらに

$$F(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\leqq\bar{\lambda}\ \text{に対して},\\ 0, & \lambda>\bar{\lambda}\ \text{に対して},\end{cases}$$

$$G(\mu)=\begin{cases}1, & \mu\leqq\bar{\mu}\ \text{に対して},\\ 0, & \mu>\bar{\mu}\ \text{に対して},\end{cases}$$

とおく．すでに知っているように，

$$F(R)=E(\bar{\lambda}),\quad G(S)=F(\bar{\mu}).$$

したがって，$F(\mathfrak{R})\cdot G(\mathfrak{S})$ は作用素

$$\frac{EF+FE}{2}$$

をもつ（$E(\bar{\lambda})$, $F(\bar{\mu})$ を簡単に E, F と書く）．$F(\mathfrak{R})$ はつねに $=0, 1$ であるから，

$$F(\mathfrak{R})^2=F(\mathfrak{R}).$$

ゆえに，

$$F(\mathfrak{R})\cdot(F(\mathfrak{R})\cdot G(\mathfrak{S}))=F(\mathfrak{R})\cdot G(\mathfrak{S}).$$

そこで，われわれの積の公式を $F(\mathfrak{R})$ および $F(\mathfrak{R})\cdot G(\mathfrak{S})$ に適用すれば（これらはすべて同時に測定可能），この積に対する作用素として

$$\frac{E\dfrac{EF+FE}{2}+\dfrac{EF+FE}{2}E}{2}=\frac{E^2F+2EFE+FE^2}{4}$$
$$=\frac{EF+FE+2EFE}{4}.$$

これは

$$\frac{EF+FE}{2}$$

に等しくなければならないから，

$$EF+FE=2\cdot EFE$$

となる．左からEをかけると

$$E^2F+EFE=2\cdot E^2FE,$$
$$EF+EFE=2\cdot EFE,$$
$$EF=EFE.$$

右からかけると

$$EFE+FE^2=2\cdot EFE^2,$$
$$EFE+FE\ =2\cdot EFE,$$
$$FE=EFE.$$

ゆえに

$$EF=FE$$

である．すなわち，すべての $E(\bar{\lambda})$, $F(\bar{\mu})$ は交換可能——したがって，ふたたび R, S が交換可能である．

II. 10. によれば，このRとSが交換可能という条件は，1つのエルミート作用素 T が存在して，R, S がそれの函数となっている：

$$R=F(T),\quad S=G(T)$$

という要求と同じものを意味する．したがって，この T が $\mathfrak{T}$ に属しておれば，

$$\mathfrak{R}=F(\mathfrak{T}),\quad \mathfrak{S}=G(\mathfrak{T})$$

である．ところでこの条件は同時測定の可能性のために十分でもある．というのは，$\mathfrak{T}$ の測定（$\mathfrak{T}$ は純粋の点スペクトルをもつから，絶対的に精確な）は同時にそれの函数 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ の測定でもるある．したがって，R, S の交換可能性

は必要かつ十分な条件である.

もっと多くの(しかし有限個の)量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… が与えられたとき，それらの作用素を R, S, …… そしてここでもそれらが精確に測定されるものとすると，同時測定の可能性についてつぎのようにいえる：すべての量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… が同時測定可能であれば，それらのうちからとったすべての対についてもそうでなければならない，すなわち，作用素 R, S, ……のすべてはたがいに交換可能である．逆に R, S, ……がたがいに交換可能であれば，II. 10. によって，それらすべてがその函数になっているような1つの作用素Tが存在する：

$$R=F(T),\quad S=G(T),\cdots\cdots$$

したがって，対応する量 $\mathfrak{T}$ については，

$$\mathfrak{R}=F(\mathfrak{T}),\quad \mathfrak{S}=G(\mathfrak{T}),\cdots\cdots$$

$\mathfrak{T}$ の精確な測定 ($\mathfrak{T}$ もやはり純粋な点スペクトルをもつ．II. 10. をみよ) はそれゆえ，同時に $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… の精確な測定でもある．すなわち，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, ……の同時測定の可能性に対して R, S, …… の交換可能性は必要かつ十分である.

こんどは，絶対的でなく，あらかじめ与えられた (任意に大きい) 精確さしかもたないような測定を考えよう．そうすると R, S, ……は純粋の点スペクトルをもつ必要はない.

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… の限られた精度での測定は $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, …… をこの節のはじめに (限られた精度での測定を議論したさいに——もちろんそこでは $F(\lambda)$ だけしか与えなかったが) 述べたようにしてつくられる函数として，$F(\mathfrak{R})$, $G(\mathfrak{S})$, …… の精確な測定と同じ結果を与える．だから，すべての $F(\mathfrak{R})$, $G(\mathfrak{S})$, …… が絶対的な精確さで同時に測定可能ならば，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… もたしかに同時に測定可能である．しかるに $F(\mathfrak{R})$, $F(\mathfrak{S})$, …… の同時測定の可能性は$F(R)$, $G(S)$, …… の交換可能性と同等であり，それはまた R, S, …… の交換可能性からでてくる．したがって，いずれにせよ R, S, …… の交換可能性は十分条件である.

逆に $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… が同時に測定可能であることを仮定すれば，つぎのように議論が進められる．$\mathfrak{R}$ を十分精確に測定すれば，その値が $>\bar{\lambda}$ であるか $\leqq\bar{\lambda}$ であるかを決定することができる (とくに注 126) で論じた，われわれの“限られた精確さ”の定義を参照)．したがって，

$$F(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\leqq\bar{\lambda}\\ 0, & \lambda>\lambda\end{cases}$$

と定義すれば，$F(\mathfrak{R})$ は絶対的に精確に測定可能である．同様に

$$G(\mu)=\begin{cases}1, & \mu\leqq\bar{\mu}\\ 0, & \mu>\bar{\mu}\end{cases}$$

に対して，$G(\mathfrak{S})$ は絶対的に精確な測定が可能であり，そのうえ2つの量は同時に測定可能である．したがって $F(R)$, $G(S)$ は交換可能である．そこで $E(\lambda)$, $F(\mu)$ を R, S に属する単位の分解とすれば，

$$F(R)=E(\bar{\lambda}),\quad G(S)=F(\bar{\mu}).$$

ゆえに，$E(\bar{\lambda})$ と $F(\bar{\mu})$ とは交換可能――すべての $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ に対してそうである．したがって，R, S は交換可能であり，かつこれは $R, S,$…… からとったすべての対について成り立たなければならないから，すべての $R, S,$……はたがいに交換可能である．ゆえにこの条件は必要でもある．

こうして，つぎのことがわかる：任意個の（有限個）量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… の同時測定の可能性を特徴づける条件は，それらの作用素 $R, S,$ …… の交換可能性である．しかもこのことは絶対的に精確な測定に対しても，任意の精度の測定に対しても成り立つ．ただ，はじめの場合には，絶対に精確な測定が可能であることを特徴づける，作用素が純粋の点スペクトルをもつという条件を要求しなければならない．

W. はこの（**W.** を包含する）理論のなかで一般的に主張できる命題はすべて含んでいる，ということがこうして数学的に証明されたことになる．なぜなら，**W.** は作用素 $R_1, \ldots\ldots, R_l$ の交換可能性だけを前提としているが，もしこの条件がなければ，$\mathfrak{R}_1, \ldots\ldots \mathfrak{R}_l$ の同時測定ということはそもそも不可能なので，これらの量の同時測定の結果というようなことについては何もいえないからである．

4. 不確定性関係

まえの数節でわれわれは，1つの量もしくは2つ以上の同時に測定可能な量にかかわる測定過程の本質を解明してきた．これからは，同時に測定可能でない量の（同一の状態 φ にある）同一の系における統計に関心を向けるとき，それらの量がいかなるふるまいを示すか，を明らかにしてゆかなければならない．

そこで，このような量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, およびそれらの（交換可能でない！）作用素 R, S があたえられたとしよう．この仮定にもかかわらず，2つの量がするど

い値（すなわち分散が 0）をもつような状態が存在しうる——いいかえると両者の共通の固有函数がありうる；ただこのような函数からは完全直交系を作ることはできない．というのは，もしできるなら R, S は交換可能であったであろうから（II. 8. に与えた，対応する単位の分解 $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ の構成を参照：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ がうえのような完全直交系であるならば，$E(\lambda)$ も $F(\lambda)$ も $P_{[\varphi_\rho]}$ の和であり，したがって $P_{[\varphi_\rho]}$ が交換可能だからそれらも交換可能である）．これがなにを意味するかはたやすくわかる：これらの φ によって張られる閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{R}_\infty$ よりも小さいはずである——なぜなら，かりにそれが $\mathfrak{R}_\infty$ と等しいとすると，求める規格化された完全直交系は，II. 6 のはじめに与えたただ1つの作用素に対するものとまったく同様にして作り上げることができることになるからである．

$\mathfrak{M}$ に属する状態に対しては $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は同時に測定可能である．このことは，同時測定に対するモデルをあたえることによって，もっとも簡単に証明される．R, S の共通の固有函数 φ は $\mathfrak{M}$ を張るから，このような φ からなる，ちょうど $\mathfrak{M}$ を張る（すなわち $\mathfrak{M}$ のなかで完全な）規格化直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が存在する（これもやはり，うえでふれた II. 6. の構成法を使って求められる）．$\mathfrak{R}_\infty - \mathfrak{M}$ を張る規格化直交系 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ を $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に附け加えることによって，それを完全系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ に拡張する．さて $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をおたがいに異った数とし，また T を

$$T\Big(\sum_n x_n \cdot \varphi_n + \sum_n y_n \cdot \psi_n\Big) = \sum_n \lambda_n x_n \cdot \varphi_n + \sum_n \mu_n y_n \cdot \psi_n$$

で定義し，$\mathfrak{T}$ をそれに属する量としよう．

$\mathfrak{T}$ の測定は，III. 3 で知ったように状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ のなかの1つを生じさせる．かりに φ_n が生じたとすると（それは測定結果が λ_n であるということから認められる），$\mathfrak{R}$ および $\mathfrak{S}$ の値もわかるわけである：なぜなら，仮定によって $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は φ_n でするどい値をもち，すぐ続いて行われる $\mathfrak{R}$ あるいは $\mathfrak{S}$ の観測でそれぞれこの値を見出すことを確実に予言できるからである．それに反して，ψ_n が生じたとすると，このようなことはなにもわからない（ψ_n は $\mathfrak{M}$ のなかにないから，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は ψ_n でするどい値をもたない）．ところで ψ_n が見出される確率は，すでに知っているように

$$(P_{[\psi_n]}\varphi, \varphi)$$

であるから，ψ_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ のどれかを見出す確率は

$$\sum_n (P_{[\varphi_n]}\varphi,\ \varphi)=(P_{\mathfrak{N}_\infty-\mathfrak{M}}\varphi,\ \varphi)=\|P_{\mathfrak{N}_\infty-\mathfrak{M}}\varphi\|^2=\|\varphi-P_{\mathfrak{M}}\varphi\|^2$$

である．したがって

$$\varphi=P_{\mathfrak{M}}\varphi.$$

すなわち，φ が $\mathfrak{M}$ に属するときには，この確率は 0，いいかえると $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は確実に同時に測定される[129]．

いま興味があるのは同時に測定可能でない量であるから，極端な場合

$$\mathfrak{M}=(0)$$

にあると仮定しよう：すなわち $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ はどの 1 つの状態においても同時に測定可能でない——あるいは，R, S の共通な固有函数は存在しない，と仮定する．

R, S が単位の分解 $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ をもつならば，III. 1. で知ったように，状態 φ における R, S の期待値は

$$\rho=(R\varphi,\ \varphi),\quad \sigma=(S\varphi,\ \varphi)$$

であり，それらの分散，すなわち

$$(\mathfrak{R}-\rho)^2,\quad (\mathfrak{S}-\sigma)^2$$

の期待値は（III. 3. における絶対的に精確な測定の議論をみよ），

$$\varepsilon^2=((R-\rho\cdot 1)^2\varphi,\ \varphi)=\|(R-\rho\cdot 1)\varphi\|^2=\|R\varphi-\rho\varphi\|^2$$
$$\eta^2=((S-\sigma\cdot 1)^2\varphi,\ \varphi)=\|(S-\sigma\cdot 1)\varphi\|^2=\|S\varphi-\sigma\varphi\|^2$$

である．周知の変形によってこれはつぎのようになる[130]；

$$\varepsilon^2=\|R\varphi\|^2-(R\varphi,\ \varphi)^2,$$
$$\eta^2=\|S\varphi\|^2-(S\varphi,\ \varphi)^2$$

（$\|\varphi\|=1$ のおかげで Schwarz の不等式，すなわち II. 1.，定理 *1* がすでに，左辺が $\geqq 0$ であることを示している）．ここでつぎのような疑問がおこる：けっして $\varepsilon=0$, $\eta=0$ とはなりえないが，ε だけを 1 つとってみればいくらでも小さくすることができるし，η についても同様である（$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は別々には任意

129）絶対的に精確な測定のできない $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$（連続スペクトル！）等々の場合の "$\mathfrak{M}$ に属する φ に対する同時測定可能性" をさらにくわしく論議することは読者に任せよう．それは III. 3 の考察とまったく同じようにして行われる．

130）作用素の計算はつぎのように行われる：

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&=((R-\rho\cdot 1)^2\varphi,\varphi)=(R^2\varphi,\varphi)-2\rho\cdot(R\varphi,\varphi)+\rho^2\\&=\|R\varphi\|^2-2\cdot(R\varphi,\varphi)^2+(R\varphi,\varphi)^2\\&=\|R\varphi\|^2-(R\varphi,\varphi)^2.\end{aligned}$$

η に対しても同様である．

に精確に，場合によっては絶対的に精確に測定可能である）．したがって ε, η が同時に小さくなることをさまたげる関係がそれらのあいだになければならないのではないか?——それはどのようなものであろうか?

このような関係が存在することは，Heisenberg によって見出された[131]．それらの関係は量子力学に起因する自然記述の不確定性を認識するうえできわめて重要である．そのためにそれは不確定性関係とよばれる．われわれは，この種の関係のうちもっとも重要なものをまず数学的に導き，それから，それがもつ原理的な意味およびそれの経験との関連にもどることにしよう．

行列理論においては，交換関係

$$PQ-QP=\frac{h}{2\pi i}1$$

をもつ作用素 P, Q が重要な役割を演ずる：たとえばそれらは座標およびそれに共役な運動量に対応していた（I. 2. をみよ）——あるいはもっと一般的に，古典力学において正準共役である任意の2つの量であった（たとえば注 2）にあげた論文をみよ）．われわれは，いくらか一般的に，

$$PQ-QP=a\cdot 1$$

である2つのエルミート作用素 P, Q に注目しよう．（そして

$$(PQ-QP)^*=QP-PQ$$

であるから，

$$(\bar{a}\cdot 1)^*=\bar{a}\cdot 1=-a\cdot 1,\quad \bar{a}=-a$$

すなわち a は純粋に虚数である．もちろんこの作用素の等式は定義域については成りたたない：$PQ-QP$ はいたるところで意味をもつとはかぎらない．）このとき各 φ に対して

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Im}(P\varphi,\ Q\varphi)&=-i[(P\varphi,\ Q\varphi)-(Q\varphi,\ P\varphi)]\\&=-i[(QP\varphi,\ \varphi)-(PQ\varphi,\ \varphi)]\\&=(i\{PQ-QP\}\varphi,\ \varphi)=ia\cdot\|\varphi\|^2\end{aligned}$$

がなりたつ．$a\neq 0$ とすると，（定理 *1*, II. 1.）

$$\|\varphi\|^2=-\frac{2i}{a}\mathrm{Im}(P\varphi,\ Q\varphi)\leqq\frac{2}{|a|}|(P\varphi,\ Q\varphi)|\leqq\frac{2}{|a|}\|P\varphi\|\cdot\|Q\varphi\|$$

131） Z. Physik Bd. **43** (1927). これらの考察は Bohr によって深められた．Naturwiss. Bd. **16** (1928). 以下でおこなわれる解析的な取扱いは Kennard によって始められ〔Z. Physik. Bd. **44**. (1927)〕，Robertson によって現在の形にあたえられたものである．

であり，したがって $\|\varphi\|=1$ に対して

$$\|P\varphi\|\cdot\|Q\varphi\|\geqq\frac{|a|}{2}$$

を得る．$P-\rho\cdot 1$, $Q-\sigma\cdot 1$ は同じくうえの交換関係をみたすから，また

$$\|P\varphi-\rho\cdot\varphi\|\cdot\|Q\varphi-\sigma\varphi\|\geqq\frac{|a|}{2}$$

もなりたつ．したがって，平均値および分散

$$\rho=(P\varphi,\ \varphi),\qquad \varepsilon^2=\|P\varphi-\rho\cdot\varphi\|^2$$
$$\sigma=(Q\varphi,\ \varphi),\qquad \eta^2=\|Q\varphi-\sigma\cdot\varphi\|^2$$

を導入すれば，

(U.) $$\varepsilon\eta\geqq\frac{|a|}{2}$$

となる．等号が成立するためには，式を導くさいに利用した $\leqq$ という不等式において，つねに $=$ がなりたつことが必要かつ十分である．したがって，$P'=P-\rho\cdot 1$, $Q'=Q-\sigma\cdot 1$ としてつぎの式をうる：

$$-\frac{i|a|}{a}\mathrm{Im}(P'\varphi,\ Q'\varphi)=|(P'\varphi,\ Q'\varphi)|=\|P'\varphi\|\cdot\|Q'\varphi\|.$$

最後の式は，II. 1., 定理 *1.* によると，$P'\varphi$, $Q'\varphi$ がただ定数因子だけ違っているにすぎないことを意味する——そして

$$\|P'\varphi\|\cdot\|Q'\varphi\|\geqq\frac{|a|}{2}>0$$

から

$$P'\varphi\neq 0,\qquad Q'\varphi\neq 0$$

が結論されるから，

$$P'\varphi=c\cdot Q'\varphi,\qquad c\neq 0$$

でなければならない．最初の式は，

$$(P'\varphi,\ Q'\varphi)=c\cdot\|Q'\varphi\|^2$$

が純粋に虚数であり，しかもそれの i-係数が $-i|a|/a$ (実数！) と同じ符号をもつ，すなわち a と逆の符号をもつことを意味している．したがって：$c=i\gamma$, γ は実で，$\frac{a}{i}\lesseqgtr 0$ にしたがって $\gtrless 0$ である．このようにして，

(Gl.) $\quad P'\varphi=i\gamma\cdot Q'\varphi,\quad \gamma$ は実数で $ia\lesseqgtr 0$ に対して $\lesseqgtr 0$.

ρ, σ の定義からなお

$$(P'\varphi,\ \varphi)=0, \qquad (Q'\varphi,\ \varphi)=0$$

が要求されるが，(**Gl.**) から

$$(P'\varphi,\ \varphi)=i\gamma(Q'\varphi,\ \varphi)$$

であり，この左辺は実，そして右辺はまったく虚数なのであるから，うえの2式はいずれにせよ成り立つ．つぎに $\varepsilon,\ \eta$ を定めよう．

$$\varepsilon:\eta=\|P'\varphi\|:\|Q'\varphi\|=|c|=|\gamma|,$$

$$\varepsilon\eta=\frac{|a|}{2}$$

である．$\varepsilon,\ \eta$ は両方とも正であるから，これらから，

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{|a|\cdot|\gamma|}{2}}, \qquad \eta=\sqrt{\frac{|a|}{2|\gamma|}}.$$

量子力学の場合，$a=\dfrac{h}{2\pi i}$ に対しては，(**U.**) から

(**U′.**)
$$\varepsilon\cdot\eta\geqq\frac{h}{4\pi}$$

となる．また，$P,\ Q$ がたとえば Schrödinger 理論の作用素 $P=\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}\cdots\cdots$, $Q=q\cdots\cdots$ であるときに，(**Gl.**) を考察することもできる．（I. 2. をみよ．われわれは，自由度1の力学系があり，そのただ1つの座標が q であると仮定する．）このとき (**Gl.**) はつぎのとおりである：

$$\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}-\rho\right)\varphi=i\gamma(q-\sigma)\varphi.$$

$ia=\dfrac{h}{2\pi}>0$ であるから $\gamma>0$. それゆえ：

$$\frac{\partial}{\partial q}\varphi=\left\{-\frac{2\pi}{h}\gamma\cdot q+\frac{2\pi}{h}\gamma\sigma+\frac{2\pi}{h}\rho\cdot i\right\}\varphi.$$

すなわち，

$$\varphi=e^{\int^{q}\left\{-\frac{2\pi}{h}\gamma\cdot q+\frac{2\pi}{h}\gamma\sigma+\frac{2\pi}{h}\rho\cdot i\right\}dq}$$

$$=Ce^{-\frac{\pi\gamma}{h}q^2+\frac{2\pi\gamma}{h}\sigma q+\frac{2\pi\rho}{h}iq}$$

$$=C'e^{-\frac{\pi\gamma}{h}(q-\sigma)^2+\frac{2\pi\rho}{h}iq}.$$

$$\|\varphi\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(q)|^2dq$$

は $\gamma>0$ によって実際に有限であり，C' は $\|\varphi\|=1$ から定められる：

$$\|\varphi\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(q)|^2dq=|C'|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\pi\gamma}{h}(q-\sigma)^2}dq$$
$$=|C'|^2\sqrt{\frac{h}{2\pi\gamma}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx$$
$$=|C'|^2\sqrt{\frac{h}{2\pi\gamma}}\sqrt{\pi}=|C'|^2\sqrt{\frac{h}{2\gamma}}=1,$$
$$|C'|=\left(\frac{2\gamma}{h}\right)^{1/4}.$$

したがって物理的に無意味な絶対値1の因子をおとせば $C'=\left(\frac{2\gamma}{h}\right)^{1/4}$，すなわち，

$$\varphi=\varphi(q)\equiv\left(\frac{2\gamma}{h}\right)^{1/4}e^{-\frac{\pi\gamma}{h}(q-\sigma)^2+\frac{2\pi\rho}{h}iq}.$$

ε, η は

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{h\gamma}{4\pi}},\qquad \eta=\sqrt{\frac{h}{4\pi\gamma}}$$

であることがわかっている．したがって，$\varepsilon\eta=\frac{h}{4\pi}$ という条件を度外視すれば，これらはγが 0 から $+\infty$ まで変化するとき，任意の値をとる．すなわち；$\varepsilon\eta=\frac{h}{4\pi}$ をみたすような，ρ, σ, ε, η, の各組はまさしくただ1つのφによって実現される．このφは最初に Heisenberg によって研究され，量子力学的な事態の説明に用いられた——それはこのような目的にきわめて適している．というのは，それが，量子力学で可能なかぎりで古典力学的な事態（そこでは p, q は両方とも分散しない）へ極度に近づいたものを表わしており，また任意にεか，あるいはηかにあらかじめ定めた値を与えることができるからである（前掲の注 131）をみよ）．

うえでおこなった考察でもって，われわれはようやく不確定性関係の1つの，すなわち，形式的な面を把握したのである：この関係を完全に理解するためには，なおそれをもう1つの観点から，すなわち，直接的な物理的経験の観点から，考察することが必要である．というのは，この不確定性関係は，量子力学の形成の基礎になった諸事実の多くのものよりもいっそう単純な，たやすく見通しうる仕方で物理的な経験と結びついており，またそれだから，うえのまったく形式的な導き方は不確定性関係に完全にはふさわしくないからである．ちょっとみると，直観と矛盾するものがここにあるという印象を受けかねないだけに，直観的な議論がますます必要である：なぜ1つの物体の位置と速度（す

なわち，座標と運動量）を同時に，任意に高い精確さでもって測定することが——たとえ十分に精密な測定手段をもっているとしても——できないのか，ということはただちにわかることではなかろう．それゆえ，もっとも精密な（場合によっては思考実験の意味でのみ行うことができるような）測定過程を綿密に分析することによって，実はそのような疑いが正しくないことを明らかにする必要がある．実際に精確な測定に到達しようとするとき，波動光学，電気力学および原子的な素過程のよく知られた諸法則は，まさに不確定性関係が要求する点で，こえることのできない制限を課するのである．しかも，このことは，うえのような現象を純粋に古典論的に（量子論的にではなしに）研究するときにすでに認められるのである．これは原理的に重要である：というのは，それがつぎの事実を示しているからである．すなわち，量子力学の正当性とは独立に確められている古典論の領域（すなわち，量子力学的な現象が以前の考察の仕方になんら本質的な変更を要求しないところ）——したがって，本来われわれの直観が直接近づきうる唯一の領域[132]——においても，一見逆説的にみえる量子力学の不確定性関係はなんら経験と矛盾しないのである．

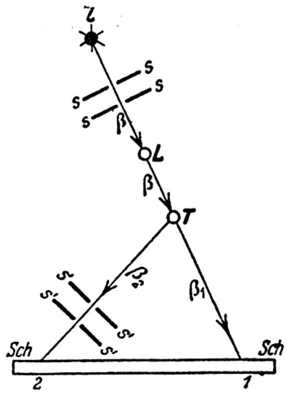
示さなければならないのは，p, q が2つの正準共役な量であり，p の値が ε の精度でもって与えられるような（すなわち，誤差の限界 ε の p 測定後の）状態に系があるとき，q を $\eta=\dfrac{h}{4\pi\varepsilon}$ よりも高い精度で知ることはできない，あるいは；精度 ε の p の測定は，q の値に $\eta=\dfrac{h}{4\pi\varepsilon}$ の不確定さをもちこむはずである，ということである．もちろんこのような非常に定性的な考察では細かい点まですべて正確に明らかにすることはできない：$\varepsilon\eta=\dfrac{h}{4\pi}$ のかわりにわれわれは可能なもっとも精確な測定に対して，ただ $\varepsilon\eta\sim h$（すなわち $\eta\varepsilon$ が h の程度の大きさであること）を示すことができるのみである．特徴的な例として，1個の粒子 T の位置（座標）と運動量という共役な組を考察することにしよう[133]．

最初に位置の決定を調べる．これは，T を見ること，すなわち，それを照らして，その散乱光が眼に吸収されることによって達せられる．したがって，

132) この事情の原理的な意味は Bohr によって強調された．上掲の注 131)．なお以下で用いられる記述の仕方は1つの点でまったく古典的ではない：光量子の存在が利用されている．すなわち，振動数 ν の光はけっして $h\nu$ よりも小さいエネルギーをもって現われることはない，という事実である．

133) 以下に続く議論は Heisenberg および Bohr による．前掲の注 131) をみよ．

光源 l から光量子 L が T に向って射出され，そしてその軌道の終点，スクリーン Sch（これは眼あるいは写真乾板でおきかえられる）において吸収されて消滅する（図 1）．測定は，L が 1（それの自然な軌道 $\beta\beta_1$ の端点）においてではなく，2（$\beta\beta_2$ の端点）でスクリーンに当ったということを確認することによって完結する．しかしこれから衝突の（すなわち T の）位置を見出すことができるためには，そのほかに β および β_2 の方向も知らなければならない（つまり衝突の前後の L の方向）：これは適当なスリットの系 ss および $s's'$ をそう入することによって達せられる．（このような方法では，ほんとうに T の座標の観測が遂行されるのではなく，座標がある定まった——スリットを適当に設定することによって任意に与えることができる方向 β および β_2 の交点に対応する——値をもつかもたないか，という問に対する答がくだされる．多くのこのような断定を重ねあわせること，いいかえると多くのスリット $s's'$ を設けることによって，はじめて座標の観測と同等になる．）ところでこの位置の測定の精確さはどうであろうか？



第 1 図

それには光学的写像の法則からくる原理的な制限がある．実際に，波長 λ の光で λ よりも小さい対象の鮮鋭な像をつくること，あるいは少くとも（ゆがんだ）像について云々できるほど散乱を小さくすることは不可能である．もちろん，T の位置を確定するためには L の方向がふれるという事実のみでたりるから，なにも光学的写像を必要としない．しかしながら，スリット ss および $s's'$ は λ よりもせまくすることは許されない．というのは，それよりせまくなると L はそれらのスリットをまっすぐに通ることができず，かえって干渉縞の束ができる——そのためにもはや，相前後しておかれたスリット ss あるいは $s's'$ の方向から光線の方向 β あるいは β_2 を知ることができないようになる．その結果，この放射体 L を用いたのでは，λ よりも大きな精確さで目標を狙ってあてることはどうしてもできないのである．

したがって，波長 λ は同時に座標測定の誤差の尺度でもある：$\lambda\sim\varepsilon$. L をさらに特徴づけるものは，それの振動数 ν，エネルギー $\bar{E}$，運動量 $\bar{p}$ である；

それらのあいだには，よく知られているようにつぎの関係が成り立つ；

$$\nu=\frac{c}{\lambda},\quad \bar{E}=h\nu=\frac{hc}{\lambda},\quad \bar{p}=\frac{\bar{E}}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$$

(c は光速度)[134]．したがって

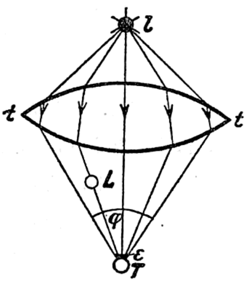
$$\bar{p}\sim\frac{h}{\varepsilon}.$$

さて，L と T とのあいだの精確に知られていない衝突現象においては，明らかに $\bar{p}$ すなわち $\frac{h}{\varepsilon}$ 程度の大きさの，運動量のやりとりが起る．したがって，これから T に対する運動量の不確定性

$$\eta\sim\frac{h}{\varepsilon}$$

が生ずる．

もし1つの事情がみのがされていなかったとしたら，これでもって $\varepsilon\eta\sim h$ が証明されたことになる．つまり衝突過程はけっしてそれほど知りえなくはないのである：事実われわれはまえとあとの L の運動の方向を知っている．——これから T に移された運動量の大きさが求められる．したがって $\bar{p}$ は η に対する尺度ではなく，むしろ光線の方向 β および β_2 に起りうる不確定さである．小さな対象 T を "狙うこと" とそれにともなう方向の不確定さとのあいだの関係をより精確に見出すことができるためには，細隙 ss よりももっと完全な "狙いをつける" 装置——すなわち，レンズを使う方が好都合である．それゆえ顕微鏡のよく知られた理論を考えにいれなければならない．それによると，長さの拡がりが ε である面要素を照射する（すなわち，L を使って T を ε の精度で照射する）ことができるためには，波長 λ とレンズの口径 φ とのあいだに



第 2 図

$$\frac{\lambda}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\sim\varepsilon$$

134) たとえば Einstein の原論文，Ann. Physik Bd. 14 (1905) を参照：あるいはどれか新しい教科書をみよ．

がなりたつようなものを使わなければならない（図 2[135]）. L の運動量の tt 方向の成分の不確定さは，L の方向が $-\frac{\varphi}{2}$ と $+\frac{\varphi}{2}$ のあいだにあるが，それ以上は知られないことから起る——したがってその大きさは

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\bar{p}=\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\varepsilon}$$

である．これは η に対する正しい尺度であるから，ふたたび

$$\eta\sim\frac{h}{\varepsilon},\ すなわち\quad \varepsilon\eta\sim h.$$

この例は不確定性原理のメカニズムを真に明瞭に示している：精確に狙うためには，大きな眼（大きな口径 φ）および非常に短い波長の光を必要とする——すなわち，光量子の運動量が非常に不確定でかつ大きくなるが，それは測定する対象 T との見通しのつかない衝突（コンプトン効果）をひき起し，そしてそれによって T の運動量を“ぬりつぶす”のである．

さらに逆の測定過程を考察しよう：速度の（運動量の）測定．この場合にはまずつぎのことがいえる：T の速度を測定するしぜんな方法は，それの位置を2つの異った時刻，たとえば0と t で測定し，そして座標の変化を t で割るという方法である．しかしながら，そのさいに速度が時間間隔 0, t において不変でなければならない；もしそれが変るならば，この変化は，いまうえで計算した平均の速度と実際の速度（たとえば，t という瞬間の）とのあいだのずれに対する，すなわち測定の不確定さに対する目安である——同じことは運動量に対しても成り立つ．いま座標の測定が精度 ε でもって行われるとすると，これはたしかに平均の運動量に対する測定の不確定さには影響を及ぼさない．というのは，t を任意に大きくえらぶことができるからである．しかしながらそれは運動量の変化 $\sim\frac{h}{\varepsilon}$ をひき起し，したがって，最後の運動量に関して $\eta\sim\frac{h}{\varepsilon}$ の不確定性をもたらす．それゆえいずれにせよ $\varepsilon\eta\sim h$ が現われる．そ

135）顕微鏡の理論を知るためには，たとえば *Handbuch der Physik*, Berlin 1927 の Bd. 18, Kap. 2. G. を参照．非常に精確な観測では ε，したがってまた λ は非常に小さい．すなわち γ 線あるいはもっと極端に短い波長の光を使わなければならない．このような場合には普通のレンズは役に立たず，γ-線によって，その分子が破かいされたり，その位置からはじき出されたりしないようなレンズだけが使えるだろう．既知の自然法則はこのような分子もしくは，粒子の存在を否定しないから，それを使うことは思考実験の目的にとっては許される．

れだから，なにか新しいことを与えることができるのは，位置の測定に結びついていないような運動量の測定だけである．このようなものはもちろん可能であり，たとえば天文学でしばしば使われている：それはドップラー効果にもとづいている．これを用いてみよう．

よく知られているようにドップラー効果の内容はつぎのとおりである：速度 v で運動している物体 T から（運動物体で測った）振動数 ν_0 で放出された光は，静止している観測者から見ると変化した振動数 ν で観察され，それは

$$\frac{\nu-\nu_0}{\nu_0}=\frac{v}{c}\cos\theta$$

という関係から計算される．（θ は運動の方向と放出の方向とのあいだの角である．なおこの公式は非相対論的である，つまり $\dfrac{v}{c}$ の値が小さいときにのみ使える．しかしこれは容易に補正することができる．）したがって，ν が観測され，かつ ν_0 が知られていれば――たとえばそれが知られた元素のある定ったスペクトル線であるという理由で――速度の決定は可能となる．もっと正確にいうと，観測の（光の放出の）方向への速度成分

$$v\cos\theta=\frac{c(\nu-\nu_0)}{\nu_0},$$

あるいはそれに対応する運動量成分

$$p'=p\cos\theta=\frac{mc(\nu-\nu_0)}{\nu_0}$$

（m は物体 T の質量）が測定される．p' の分散 η は明らかに ν の分散 $\Delta\nu$ と関係している：したがって

$$\eta\sim\frac{mc\Delta\nu}{\nu_0}\sim\frac{mc\Delta\nu}{\nu}$$

である．T の運動量はもちろん，それが振動数 ν の，したがって運動量 $\bar{p}=\dfrac{h\nu}{c}$ の光量子を放出することによって変化するが，この量の不確定さ $\dfrac{h\Delta\nu}{c}$ は普通の状況のもとでは $\dfrac{mc\Delta\nu}{\nu}$ に比べて無視できる[136]．

---

136) $\dfrac{mc\Delta\nu}{\nu}$ が $\dfrac{h\Delta\nu}{c}$ に比べて大きいことは，ν が $\dfrac{mc^2}{h}$ に対して小さいこと，すなわち $\bar{E}=h\nu$ が mc^2 に比べて小さいことを意味する．すなわち，光量子 L のエネルギーが T の相対論的静止質量に比して小さいこと――これは，非相対論的な計算ではもともとさけられない仮定である．

ν はなんらかの干渉の現象によって測られるが，明らかにこのような現象は，純粋な単色光の波連の場合にしか完全にするどい ν の値を与えない．このような波連は

$$a\sin\left(2\pi\left(\frac{q}{\lambda}-\nu t\right)+\alpha\right)$$

という形をしているから（q は座標，t は時間，a は振幅，α は位相——表わされるものはなんらかの，電場あるいは磁場の場の強さの成分である），空間的にも時間的にも無限にひろがっている．これをさけるためには，$\lambda=\dfrac{c}{\nu}$ のために $a\sin\left(2\pi\nu\left(\dfrac{q}{c}-t\right)+\alpha\right)$ とも書けるこの表式を，変数の有限な区間においてのみ $\neq 0$ である他の表式 $F\left(\dfrac{q}{c}-t\right)$ によって置きかえなければならない．もし光波がこのような形をしておれば，それはよく知られているようにフーリエ分解されるはずである：

$$F(x)=\int_0^\infty a_\nu\sin(2\pi\nu x+\alpha_\nu)d\nu.$$

そして干渉像は，$a_\nu\neq 0$ であるようなすべての振動数 ν を示す．しかも，振動数の区間 ν, $\nu+d\nu$ の相対的強度は $a_\nu^2 d\nu$ である．ν の分散，すなわち $\Delta\nu$ はこの分布から計算されるべきである．

われわれの使う波連が x について長さ τ をもつ，いいかえると t あるいは q についてそれぞれ長さ τ あるいは $c\tau$ をもつならば，この ν-分散は $\sim\dfrac{1}{\tau}$ であることがわかる[137]．さてこの測定の方法では，位置の不確定さは，T が1

137）たとえば，$F(x)$ が振動数 ν_0 をもつ，0から τ まで拡がった有限の単色光の波連であるとしよう：

$$F(x)=\begin{cases}\alpha\sin 2\pi\nu_0 x, & 0\leqq x\leqq\tau \text{ に対して}\\ 0 & \text{その他の場合}\end{cases}$$

（連続に接続できるためには，$\sin 2\pi\nu_0\tau=0$ でなければならない．すなわち，$\nu_0=\dfrac{n}{2\tau}$，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$）．このとき，よく知られたフーリエ積分の反転公式によって（さきの注87）を参照）

$$a_\nu^2=b_\nu^2+c_\nu^2.$$

ここで

$$\left.\begin{matrix}b_\nu\\ c_\nu\end{matrix}\right\}=2\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2\pi\nu x\cdot dx=2a\int_0^\tau\sin 2\pi\nu_0 x\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}2\pi\nu x\cdot dx$$

$$=\pm a\int_0^\tau\left(\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\pi(\nu+\nu_0)x-\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\pi(\nu-\nu_0)x\right)\cdot dx$$

つ1つの光の放出にさいして反撥 $\frac{h\nu}{c}$ を，すなわち，速度の変化 $\frac{h\nu}{mc}$ を（観測する方向に）受けることによって生ずる．しかしながら，放出の過程は時間 τ を必要とするから，この速度変化の瞬間を τ よりももっと精確に局限することはできない——したがって長さの不確定さは $\varepsilon\sim\frac{h\nu}{mc}\tau$ である．したがって：

$$\varepsilon\sim\frac{h\nu}{mc}\tau,\quad \eta\sim\frac{mc\Delta\nu}{\nu}=\frac{mc}{\nu}=\frac{1}{\tau},$$

$$\varepsilon\eta\sim h.$$

したがって，ふたたび $\varepsilon\eta\sim h$ である．

ここで仮定したように $\boldsymbol{T}$ 自身が光を放出するのではなく，それが他からくる光を散乱する場合も（いいかえるとそれが照射されるとき）計算はまったく同じように行われる．

5. 命題としての射影作用素

III. 1. と同じように，k 個の自由度をもつ物理系 S を考える．それの状態空間は k 個の座標，$q_1, \cdots\cdots, q_k$ によって記述される（I. 2. も参照）．系 S について考えられるすべての物理量 $\mathfrak{R}$ は古典力学的な考察のさいには，$q_1, \cdots\cdots, q_k$

$$=-a\left[\frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\pi(\nu+\nu_0)x}{\pi(\nu+\nu_0)}-\frac{\begin{matrix}\cos\\ \text{sni}\end{matrix}\pi(\nu-\nu_0)x}{\pi(\nu-\nu_0)}\right]_0^\tau$$

$$=\begin{cases}-a\left[\dfrac{(-1)^n\cos\pi\nu\tau-1}{\pi(\nu+\nu_0)}-\dfrac{(-1)^n\cos\pi\nu\tau-1}{\pi(\nu-\nu_0)}\right]=-\dfrac{2a\nu_0(1-(-1)^n\cos\pi\nu\tau)}{\pi(\nu^2-\nu_0^2)},\\ -a\left[\dfrac{(-1)^n\sin\pi\nu\tau}{\pi(\nu+\nu_0)}-\dfrac{(-1)^n\sin\pi\nu\tau}{\pi(\nu-\nu_0)}\right]=\dfrac{2a\nu_0(-1)^n\sin\pi\nu\tau}{\pi(\nu^2-\nu_0^2)},\end{cases}$$

したがって

$$a_\nu=\frac{2a\nu_0\sqrt{2-2(-1)^n\cos\pi\nu\tau}}{\pi(\nu^2-\nu_0^2)}=\frac{4a\nu_0\left|\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\frac{1}{2}\pi\nu\tau\right|}{\pi(\nu^2-\nu_0^2)}=\frac{4a\nu_0|\sin\pi(\nu-\nu_0)\tau|}{\pi(\nu^2-\nu_0^2)}.$$

これからわかるように，振動数 $\nu=\nu_0$ の近傍がもっとも強く現われ，波連のエネルギーの大部分は $\pi(\nu-\nu_0)\tau$ が適当な値をとる振動数の領域に含まれている．したがって $\nu-\nu_0$ の分散（あるいは，同じことであるが，ν の分散）は $\frac{1}{\tau}$ の程度の大きさである．同じ結果は，それの目安を与える表式

$$\frac{\int_0^\infty a_\nu^2(\nu-\nu_0)^2d\nu}{\int_0^\infty a_\nu^2 d\nu}$$

をげんみつに計算することによってもえられる．

およびこれらに共役な運動量 $p_1, \cdots\cdots, p_k$ の函数である：

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}\ (q_1, \cdots\cdots, q_k,\ p_1, \cdots\cdots, p_k).$$

（したがって，例えばエネルギーはハミルトン函数 $H(q_1, \cdots\cdots, q_k,\ p_1, \cdots\cdots, p_k)$ である.）これに対して量子力学では，すでに II. 1. であらかじめ示しておいたように，量 $\mathfrak{R}$ は超極大エルミート作用素Rに一意的に対応づけられる．とくに，$q_1, \cdots\cdots, q_k$ は作用素 $Q_1=q_1\cdots\cdots, \cdots\cdots Q_k=q_k\cdots\cdots$ に，また$p_1, \cdots\cdots, p_k$ は作用素 $P_1=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}\cdots\cdots,\ P_k=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k}\cdots\cdots$ に対応する．一般には，Q_l と P_l との交換不可能性のために，$R=\mathfrak{R}\ (Q_1, \cdots\cdots, Q_k,\ P_1, \cdots\cdots, P_k)$ を定義することができないということは，すでに I. 2. でハミルトン函数の場合について明らかにしておいた．III. 1. および III. 3. では $\mathfrak{R}(q_1, \cdots\cdots, q_k,\ p_1, \cdots\cdots, p_k)$ とRとのあいだの関係についてなんらかの究極的なことにはふれずにつぎのことがらを確認した．

L. 同時に観測可能な量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ が作用素 R, S に対応するならば，量 $a\mathfrak{R}+b\mathfrak{S}$（$a$, b は実数）は作用素 $aR+bS$ に対応する．

F. 量 $\mathfrak{R}$ が作用素Rに対応するならば，量 $F(\mathfrak{R})$ は（$F(\lambda)$ は任意の実函数）作用素 $F(R)$ に対応する．

L., ***F.*** はなおいくらか一般化することができる．***F.*** をつぎのように一般化することには異論の余地がない：

F*. 同時に観測可能な量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… が作用素 R, S, …… に対応するならば，量 $F(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots\cdots)$ は作用素 $F(R, S, \cdots\cdots)$ に対応する．

ここで，$F(R, S, \cdots\cdots)$ が明瞭な意味をもつよう（R, S, …… は交換可能），$F(\lambda, \mu, \cdots\cdots)$ は λ, μ, …… の実多項式であると仮定しようと思う．***F*.*** は任意の $F(\lambda, \mu, \cdots\cdots)$ について確められるのではあるが（一般的な $F(R, S, \cdots\cdots)$ の定義については，さきの注 94）を参照）．さて，あらゆる多項式は，3つの演算 $a\lambda$, $\lambda+\mu$, $\lambda\mu$ のくり返しによって生ずるから，この3つを考察すれば十分である．また

$$\lambda\mu=\frac{1}{4}((\lambda+\mu)^2-(\lambda-\mu)^2).$$

すなわち，これは

$$\frac{1}{4}\cdot(\lambda+\mu)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(\lambda+(-1)\cdot\mu)^2$$

に等しいから，この3つの演算を $a\lambda$, $\lambda+\mu$, λ^2 でおきかえることもできる．

しかるに，最初の2つは **L.** に，最後のは **F.** に含まれるから，**F*.** は証明されたことになる．

L. のほうは量子力学では，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ が同時に測定可能でない場合にも拡張される．この問題にふれるのはあとまで（IV. 1.）のばして，さしあたり，同時に測定可能でない $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ に対して，$a\mathfrak{R}+b\mathfrak{S}$ をどう理解すべきかということは，けっして明白でないことを確認するだけで満足しておこう．

物理量 $\mathfrak{R}$ とならんで，なお物理学の対象となるものが存在する．それはすなわち系 S の状態の性質である．その性質とは例えば，ある量 $\mathfrak{R}$ が値 λ をとる——あるいは，$\mathfrak{R}$ の値は正である——あるいは，2つの同時に観測可能な量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ の値はそれぞれ λ, μ に等しい——あるいは，これらの値の平方和は >1 である，等々である．われわれは量を $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… で表わしているが，性質は $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, …… で表わすことにしよう．いましがた論じたように，量には超極大エルミート作用素 R, S, …… が対応していたが，性質には何が対応するであろうか?

すべての性質 $\mathfrak{E}$ につぎのように定義される量を対応させることができる：$\mathfrak{E}$ が存在するかしないかを決定する測定はすべてこの量の測定とみなされ，その値は，$\mathfrak{E}$ が存在すれば 1，逆の場合には 0 である．この $\mathfrak{E}$ に対応づけられた量はやはり $\mathfrak{E}$ で表わすことにしよう．

それは 0 および 1 という値しかとらないが，逆にこの 2 つの値だけが可能な量 $\mathfrak{R}$ はすべて，性質 $\mathfrak{E}$，つまり“$\mathfrak{R}$ の値は $\neq 0$ である”という性質に対応づけられる．したがって，性質に対応する量 $\mathfrak{E}$ はいまの標識によって特徴づけられる．

$\mathfrak{E}$ が 0 と 1 という値しかとらないことは，つぎのようにも定式化できる：$\mathfrak{E}$ は多項式

$$F(\lambda)=\lambda-\lambda^2$$

を恒等的にゼロにする．$\mathfrak{E}$ が作用素 E をもてば，$F(\mathfrak{E})$ は作用素

$$F(E)=E-E^2$$

をもつ．すなわち，うえの条件は

$$E-E^2=0,\quad \text{あるいは}\quad E=E^2$$

となる．あるいは，$\mathfrak{E}$ の作用素 E は射影作用素である．

したがって，性質 $\mathfrak{E}$ は（さきほど定義したそれに属する量 $\mathfrak{E}$ を媒介として）射影作用素 E に対応する．あるいはまた，$E=P_{\mathfrak{M}}$ のほかにそれに属する

線型多様体 $\mathfrak{M}$ を考察するならば，閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ に対応する．

そこで $\mathfrak{E}, E, \mathfrak{M}$ というひと組についての算法をくわしく調べなければならない．

状態φが性質 $\mathfrak{E}$ をもっているかどうかを決定しようと思えば，量 $\mathfrak{E}$ を測定してその値が1であるか 0 であるか（定義そのものによる），を確定しなければならない．したがって，はじめの場合，すなわち，性質 $\mathfrak{E}$ がある場合の確率は $\mathfrak{E}$ の期待値に等しい：すなわち，

$$(E\varphi,\ \varphi)=\|E\varphi\|^2=\|P_{\mathfrak{M}}\varphi\|^2,$$

また，性質 $\mathfrak{E}$ をもたない場合の確率は，$1-\mathfrak{E}$ の期待値に等しい．すなわち，

$$((1-E)\varphi,\ \varphi)=\|(1-E)\varphi\|^2=\|\varphi-P_{\mathfrak{M}}\varphi\|^2.$$

[これらの和はもちろん (φ, φ)，すなわち1に等しい.] したがって，第2ないしは第1の確率が0に等しいとき，すなわち

$$P_{\mathfrak{M}}\varphi=\varphi,\ \text{あるいは}\quad =0$$

のとき，それぞれ $\mathfrak{E}$ は確実に存在し，あるいは存在しない．すなわち，φが $\mathfrak{M}$ に属するか $\mathfrak{M}$ に垂直であるか，または，φが $\mathfrak{M}$ もしくは $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{M}$ に属するときである．

こうして，$\mathfrak{M}$ は性質 $\mathfrak{E}$ を確かにもつようなすべてのφの集合として定義される（元来は $\mathfrak{M}$ のうち $\|\varphi\|=1$ となる部分だけ．$\mathfrak{M}$ そのものは，それに正の定数を掛けることと0をつけ加えることによって生ずる）．

$\mathfrak{E}$の反対の性質（$\mathfrak{E}$ の否定）を “non $\mathfrak{E}$” とよべば，うえのことから直ちに，$\mathfrak{E}$ に $E, \mathfrak{M}$ が属すれば “non $\mathfrak{E}$” には $1-E, \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{M}$ が属するということがわかる．

量についてと同じく性質についても，同時測定の可能性（正しくは決定可能性）の問題が起る．それに属する量 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ が同時に測定可能なとき（任意の精度でか，絶対的な精確さでかはどちらでもよい．それはもともと0と1という値しかとりえないからである），すなわち，E, F が交換可能なとき，そしてそのときにのみ，$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ は同時に決定可能である．同じことは，もっと多くの性質 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \cdots\cdots$ についても成り立つ．

同時に決定可能な性質 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ からさらに，“$\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{F}$”，“$\mathfrak{E}$ あるいは $\mathfrak{F}$” という性質をつくることができる．“$\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{F}$” に属する量は，$\mathfrak{E}$ に属する量と $\mathfrak{F}$ に属する量がともに1に等しいときに 1，これらのうち1つが0ならば0である——それゆえ，それらの積である．したがって，**F*.** によっ

てそれの作用素は $\mathfrak{E}$ と $\mathfrak{F}$ との作用素の積，すなわち $E{\cdot}F$ である．それに属する線型多様体は II. 4. の定理 *14* によって，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ の共通部分 $\mathfrak{P}$ である．

これに対して“$\mathfrak{E}$ あるいは $\mathfrak{F}$”はつぎのように書かれる：

“non((non $\mathfrak{E}$)　および　(non $\mathfrak{F}$))”.

ゆえにその作用素は

$$1-(1-E)(1-F)=E+F-EF$$

である（これはもちろんその成り立ちからして射影作用素）．$F-EF$ が射影作用素であるから，$E+F-EF$ に属する線型多様体は

$$\mathfrak{M}+(\mathfrak{N}-\mathfrak{P})$$

である（II. 4. の定理 *14*）．これは $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$ の部分で，明らかに $\mathfrak{M}$ を含む．したがって，対称的に $\mathfrak{N}$ も含むから，$\{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$ を含む．すなわち，それは $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$ に等しく，そのうえそれは閉じているから $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ に等しい．

$\mathfrak{E}$ はつねに存在する性質（すなわち空）であるとすれば，それに対応する量は恒等的に 1 に等しく，したがって

$$E=1,\quad \mathfrak{M}=\mathfrak{R}_\infty$$

である．これに反して $\mathfrak{E}$ がけっして存在しない（すなわち，それが不可能）ならば，それに対応する量は恒等的に 0 で，それゆえ，$E=0$，$\mathfrak{M}=(0)$ である．2 つの性質 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ が両立しなければ，それらはいずれにせよ同時に決定可能でなければならない．そして“$\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{F}$”は不可能でなければならない，すなわち，E と F とは交換可能で

$$EF=0$$

である．しかるに $EF=0$ は交換可能性を含んでいる（II. 4. の定理 *14.*）から，それだけでうえのことを特徴づける．E, F が交換可能であることを前提すれば，$EF=0$ は単に，$\mathfrak{M}$ と $\mathfrak{N}$ の共通部分が 0 だけからなることを意味するにすぎない——けれども最後の性質だけからは，E, F の交換可能性はでてこない．むしろ $EF=0$ は $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ については一般に，$\mathfrak{M}$ 全体が $\mathfrak{N}$ 全体に直交することを意味するのである．

$\mathfrak{R}$ が単位の分解 $E(\lambda)$ を属させることのできる作用素 R をもつ量であるとき，“$\mathfrak{R}$ は区間 $I=\{\lambda', \mu'\}$ にある”（$\lambda'\leqq\mu'$）という性質の作用素は，例えば，それに対する確率が $(E(\mu')-E(\lambda')\varphi, \varphi)$ であることからも明らかなように（III. 1. の **W.** をみよ）$E(\mu')-E(\lambda')$ である：あるいは，この性質に属

する量は,

$$F(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda'<\lambda\leqq\mu' \text{ に対して},\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

として $\mathfrak{E}=F(\mathfrak{R})$ であり，かつ

$$F(R)=E(\mu')-E(\lambda')$$

である（II. 8. または III. 1. をみよ）からそうなるのである．III. 1. ではこの作用素は $E(I)$ とよばれた．

したがって，以上をまとめると，性質 $\mathfrak{E}$，それの射影作用素 E，およびそれの閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ のあいだの関係としてつぎのことがえられる：

α）状態 φ において性質 $\mathfrak{E}$ は，それぞれ

$$(E\varphi,\ \varphi)=\|E\varphi\|^2=\|P_{\mathfrak{M}}\varphi\|^2,$$

または

$$((1-E)\varphi,\ \varphi)=\|(1-E)\varphi\|^2=\|\varphi-P_{\mathfrak{M}}\varphi\|^2$$

の確率で存在し，あるいは存在しない．

β）$\mathfrak{E}$ は，$\mathfrak{M}$ あるいは $\mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{M}$ に属する φ に対してそれぞれ確実に存在し，あるいは存在しない．確実に存在または非存在がいえるのはこれらの場合だけである．

γ）多くの性質 $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \cdots\cdots$ の同時決定可能性を特徴づけるのは，それらの作用素 $E, F, \cdots\cdots$ が交換可能なことである．

δ）$\mathfrak{E}$ に $E, \mathfrak{M}$ が属すれば，“non $\mathfrak{E}$” には $1-E, \mathfrak{R}_\infty-\mathfrak{M}$ が属する．

ε）$\mathfrak{E}$ に $E, \mathfrak{M}$ が属し，$\mathfrak{F}$ に $F, \mathfrak{N}$ が属して，$\mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ が同時に決定可能ならば，“$\mathfrak{E}$ および $\mathfrak{F}$” には EF と $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ の共通部分とが，また，“$\mathfrak{E}$ あるいは $\mathfrak{F}$” には $E+F-EF$ と $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}\}$（これは $[\mathfrak{M}, \mathfrak{N}]$ に等しい）とが属する．

η）$E=1$ のとき，あるいは $\mathfrak{M}=\mathfrak{R}_\infty$ のとき $\mathfrak{E}$ はつねに成り立つ：$E=0$ あるいは $\mathfrak{M}=(0)$ のとき $\mathfrak{E}$ はけっして成り立たない．

ϑ）$EF=0$，あるいはまた，$\mathfrak{M}$ 全体が $\mathfrak{N}$ に垂直なときには $\mathfrak{E}$ と $\mathfrak{F}$ とは両立しない．

ζ）$\mathfrak{R}$ は1つの量，R はその作用素で I はある区間であるとする．R に属する単位の分解を $E(\lambda)$ とし，

$$I=\{\lambda',\ \mu'\}\ (\lambda'\leqq\mu')$$
$$E(I)=E(\mu')-E(\lambda')$$

とおく．そうすると，“$\mathfrak{R}$ が I にある” という性質には作用素 $E(I)$ が属する．

α)——ζ) から，以前の確率についての命題 **W.**, **E₁.**, **E₂.** も，III. 3. の同時測定の可能性に関する命題も導きだすことができる．あとの命題が γ) と同等であることは明らかである．**W.** は α), ε), ζ) から導かれ，それの結果として **E₁.**, **E₂.** がでてくる．

物理系の性質と射影作用素とのあいだの関係は，一種の論理計算を可能ならしめることがわかるであろう．ただこの場合には，量子力学に特徴的な “同時決定可能性” という概念構成によって，通常の論理学におけるよりも内容豊富になっている．

そのほか，射影作用素にもとづく命題計算は，すべての（超極大な）エルミート作用素の全体を基礎とする量についての計算に比べて，“同時決定可能性” の概念が “同時測定可能性” の概念より精密化されているという長所をもっている．例えば，“$\mathfrak{R}$ は I にあるか？” および “$\mathfrak{S}$ は J にあるか？” という問（$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ はそれぞれ作用素 R, S をもち，これらは単位の分解 $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ をもつ．$I=\{\lambda', \lambda''\}$, $J=\{\mu', \mu''\}$）の答を同時に決定できるためには，γ), ζ) によれば，作用素

$$E(I)=E(\lambda'')-E(\lambda') \quad \text{および} \quad F(J)=F(\mu'')-F(\mu')$$

が交換可能であればよい．ところが $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ が同時に測定可能であるためには，すべての $E(\lambda)$ とすべての $F(\mu)$ との交換可能性が必要である．

6. 輻　射　の　理　論

われわれは I. 2. であげた量子力学の統計的命題をただ１つの例外をのぞいてすべてふたたび見出し，しかもそれらを本質的に一般化し，体系的に配列した．われわれに欠けているのは，ある量子化された系の１つの定常状態から他の定常状態への遷移確率に対する Heisenberg の表式である．ところがまさにこれが，量子力学の成立にさいして重要な役割を果したのであった（I. 2. で述べたことを参照)．以下では Dirac[138] にしたがって，この遷移確率が量子力学

138) Proc. Roy. Soc. Lond. vol. **114** (1927). また Weyl: *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2. Aufl., S. 91 ff. Leipzig 1931（山内恭彦訳「群論と量子力学」96 頁以下．裳華房 1932）をみよ．

の通常の統計的命題から，すなわち，いましがた述べた理論からどうやって導かれるかを示す．それによって，定常状態の遷移のメカニスムおよび Einstein-Bohr のエネルギー振動数関係について深い洞察がえられるだけに，これは重要である．これから述べる Dirac の輻射理論は量子力学の領域における最も美しい成果である．

S はエルミート作用素 H_0 に対応するエネルギーをもった系（例えば量子化された原子）とする．S の状態空間を記述するための座標（例えば S が l 個の粒子からなっておれば，それは $3l$ 個のデカルト座標

$$x_1=q_1,\ y_1=q_2,\ z_1=q_3,\ \cdots\cdots,\ x_l=q_{3l-2},\ y_l=q_{3l-1},\ z_l=q_{3l}$$

である）を簡単のために ξ で表わす．さらに，簡単のために H_0 は純粋な点スペクトルをもち，固有値 $W_1, W_2, \cdots\cdots$，固有函数 $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\cdots\cdots$ とする（いくつかの W_n が一致していてもよい）．S の任意の状態，すなわちその波動函数 $\varphi(\xi)$ は時間に依存する Schrödinger の微分方程式にしたがって発展する（III. 2 をみよ）：

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(\xi)=-\mathsf{H}_0\varphi_t(\xi).$$

すなわち，$t=t_0$ に対して

$$\varphi_t(\xi)=\varphi(\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(\xi)$$

であれば，一般に

$$\varphi_t(\xi)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}a_k e^{-\frac{2\pi i}{h}W_k(t-t_0)}\varphi_k(\xi)$$

である．したがって，状態 $\varphi(\xi)=\varphi_k(\xi)$ は $e^{-\frac{2\pi i}{h}W_\kappa(t-t_0)}\varphi_k(\xi)$ へ，すなわち（$e^{-\frac{2\pi i}{h}W_\kappa(t-t_0)}$ という因子は本質的でないから）自分自身に移る：$\varphi_k(\xi)$ はまさしく定常的である．こうして，まず1つの $\varphi_k(\xi)$ からほかへの遷移は総じて存在しないことがわかったが，それならば，どうして遷移が問題になるのであろうか？ その説明は簡単である：この遷移をひき起す要因，すなわち，光が考慮されずにいたのである．初期の Bohr の理論においてすでに，定常的な量子軌道は光の放出のもとにのみくずされるとされていたのである（さきの注 5）をみよ）．もしこれを（うえに与えた場合のように）考慮せずにおけば，絶対的，永遠的な安定性がえられることはまったく合理的である．したがって，考察する系を拡げて，S によってときとして放出される光――したがっ

て，場合によって S と相互作用をすることのできるすべての光——を一緒にとりあげなければならない．光からなる系（すなわち，電子および核の電荷にもとづく静電場をさしひいた，古典論的な電磁場）を L とよべば，$S+L$ を調べなければならない．

したがって，見出さなければならないのはつぎのことである．

1. L の量子力学的記述のための手がかり，すなわち L の状態空間を与えること．

2. $S+L$ のエネルギー作用素．これは3つの部分にわかれる．

α) L とは独立な S のエネルギー．すなわち，摂動のない S のエネルギー：系 S に対してこれは作用素 H_0 であった．

β) S とは独立に存在する L のエネルギー．すなわち，摂動のない L のエネルギー．その作用素を H_l とよぶ．

γ) 残りのエネルギー．すなわち S と L の相互作用のエネルギー．その作用素を H_w とよぶ．

明らかにここでの問題は，量子力学の基本原理にしたがって，まず古典論的な答をもとめて，その結果を作用素で書き直すということである（I.2 をみよ）．したがって，まず，第一に光の本性について純粋に古典的な見地をとって，（光の電磁理論の意味で）光は電磁場の振動状態だと解釈する[139]．

よけいな複雑化（無限遠の空間における光の消失など）をさけるために，S と L とは，非常に大きな体積 V の，なにか反射壁をそなえた空洞 H のなかに閉じこめられていると考える．H のなかの電磁場はいうまでもなく電場および磁場の強さ

$$\mathfrak{E}=\{\mathfrak{E}_x,\ \mathfrak{E}_y,\ \mathfrak{E}_z\},\quad \mathfrak{H}=\{\mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z\}$$

で記述される．すべての $\mathfrak{E}_x, \cdots\cdots, \mathfrak{H}_z$ という量は H のなかの点のデカルト座標 x, y, z および時間 t の函数である．なおつぎのことを指摘しておかなければならない．しばしば実数の空間ベクトル $\mathfrak{a}=\{\mathfrak{a}_x,\ \mathfrak{a}_y,\ \mathfrak{a}_z\}$，$\mathfrak{b}=\{\mathfrak{b}_x,\ \mathfrak{b}_y,\ \mathfrak{b}_z\}$ 等等を考察しなければならないが（例えば，$\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$），これらに対して内積に似た

$$[\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}]=\mathfrak{a}_x\mathfrak{b}_x+\mathfrak{a}_y\mathfrak{b}_y+\mathfrak{a}_z\mathfrak{b}_z$$

をつくる——これを $\mathfrak{R}_\infty$ における内積 (φ, ψ) ととり違える危険はないであ

139) 興味のある読者は任意の電気力学の教科書について光の電磁理論の記述を見ることができる．例えば，Abraham-Becker: *Theorie der Elektrizität* 1930. Maxwell 理論の枠内でのその後の発展についてもこれらをみよ．

ろう．Δ でもって微分作用素

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

を表わし，div, grad, rot でよく知られたベクトルに関する微分作用素を表わす．ベクトル $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ は何もない空洞 $\boldsymbol{H}$ のなかでは Maxwell の方程式

$$\operatorname{div}\mathfrak{H}=0,\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{H}=0,$$

$$\operatorname{div}\mathfrak{E}=0,\qquad \operatorname{rot}\mathfrak{F}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{E}=0,$$

をみたす．

第1行のはじめの式は

$$\mathfrak{H}=\operatorname{rot}\mathfrak{A}$$

とおけば満足され（$\mathfrak{A}=\{\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z\}$ はいわゆるベクトル・ポテンシャルであるが，その成分も x, y, z, t に依存する），あとの式は

$$\mathfrak{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}$$

によって満足される．そうすると第2行の方程式は

$$(\boldsymbol{A}.)\qquad \operatorname{div}\mathfrak{A}=0,\qquad \Delta\mathfrak{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathfrak{A}=0$$

となる（ベクトル・ポテンシャルは多くの場合，空間と時間の対称性を高めるために，もう少し異った方法で導入される．この $\mathfrak{A}$ のとり方が Maxwell 方程式の最も一般的な解を与えるということは――そのさいとくに，2番目の行の第1の式はもともと

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A}=0,\ \text{すなわち}\ \operatorname{div}\mathfrak{A}=f(x, y, z)$$

を与えるにすぎないことに注意すべきである――，Maxwell 理論を扱ったほとんどの本に示してあるからここではこれ以上ふれない．さきの注 139）をみよ）．（$\boldsymbol{A}.$）が以下の議論の出発点である．$\boldsymbol{H}$ の壁が反射的であることは，$\mathfrak{A}$ が $\boldsymbol{H}$ の境界で $\boldsymbol{H}$ の壁に垂直にならなければならないという条件で表わされる．すべてのそのような $\mathfrak{A}$ を見出すよく知られた方法はつぎのとおりである：t は問題のどこにもあらわにはいってこないから，最も一般的な $\mathfrak{A}$ は，x, y, z に依存するベクトルと t に依存するスカラーとの積になっているような解の1次結合である：

$$\mathfrak{A}\equiv\mathfrak{A}(x,\ y,\ z,\ t)\equiv\overline{\mathfrak{A}}(x,\ y,\ z)\cdot\tilde{q}(t).$$

したがって，（$\boldsymbol{A}.$）は

（$\boldsymbol{A}_1.$） $\operatorname{div}\overline{\mathfrak{A}}=0,\quad \Delta\overline{\mathfrak{A}}=\eta\cdot\overline{\mathfrak{A}},$

$\overline{\mathfrak{A}}$ は $\boldsymbol{H}$ の境界で直角.

（$\boldsymbol{A}_2.$） $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{q}(t)=c^2\eta\tilde{q}(t)$

を与える．ここで η は，（$\boldsymbol{A}_1.$）によれば x, y, z だけに，（$\boldsymbol{A}_2$）によれば t だけに依存し，したがって定数である.

（$\boldsymbol{A}_1.$）はそれゆえ固有値問題である．η が固有値のパラメーターで，$\overline{\mathfrak{A}}$ は一般の固有函数である．この問題の理論は完全にできあがっているが，ここには結果だけを与える[140]．（$\boldsymbol{A}_1.$）は純粋の点スペクトルをもち，すべての固有値 $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots$（これらに対応する $\overline{\mathfrak{A}}$ を $\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{A}}_2, \cdots\cdots$ とする）は負であって，$n\to+\infty$ に対して $-\infty$ へ向う．完全系 $\overline{\mathfrak{A}}_1, \overline{\mathfrak{A}}_2, \cdots\cdots$ は

$$\iiint_H[\overline{\mathfrak{A}}_m,\ \overline{\mathfrak{A}}_n]dxdydz=\begin{cases}4\pi c^2, & m=n \text{ に対して}\\ 0, & m\neq n \text{ に対して}\end{cases}$$

によって規格化することができる（通常の1の代りに $4\pi c^2$ を選んだのは，のちになってこの方が実用的だからである）．$\eta_n(<0)$ を $-4\pi^2\rho_n^2/c^2$ と書くと（$\rho_n>0$, $n\to+\infty$ に対して ρ_n も $\to+\infty$），（$\boldsymbol{A}_2.$）によって

$$\tilde{q}_n(t)=\gamma\cos 2\pi\rho_n(t-\tau),\quad (\gamma,\ \tau \text{ は任意})$$

したがって，最も一般的な解 $\mathfrak{A}$ は

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(x,\ y,\ z,\ t)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{A}}_n(x,\ y,\ z)\cdot\tilde{q}_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{A}}_n(x,\ y,\ z)\gamma_n\cos 2\pi\rho_n(t-\tau_n)$$

$$(\gamma_1,\ \gamma_2,\cdots\cdots,\ \tau_1,\ \tau_2,\cdots\cdots \text{ は任意の実定数})$$

である．任意の場

$$\mathfrak{A}=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{A}}_n(x,\ y,\ z)\cdot\tilde{q}_n(t)$$

[$\mathfrak{A}$ は（$\boldsymbol{A}.$）の解であるを要しない．すなわち $\tilde{q}_n(t)$ は任意である] のエネルギーの大きさは

$$E=\frac{1}{8\pi}\iiint_H([\mathfrak{E},\ \mathfrak{E}]+[\mathfrak{H},\ \mathfrak{H}])dxdydz$$

140) R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik* I. S. 358～363. Berlin 1924 をみよ.

$$=\frac{1}{8\pi}\iiint_H\left(\frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A},\ \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A}\right]+[\mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]\right)dxdydz$$

$$=\frac{1}{8\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\iiint_H\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_m(t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n(t)[\mathfrak{A}_m,\ \mathfrak{A}_n]\right.$$

$$\left.+\tilde{q}_m(t)\tilde{q}_n[\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_m,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_n]\right)dxdydz$$

である．部分積分によって

$$\iiint_H[\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_m,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_n]dxdydz$$

$$=\iiint_H[-\Delta\mathfrak{A}_m+\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\mathfrak{A}_m,\ \mathfrak{A}_n]dxdydz$$

$$=\frac{4\pi^2\rho_m{}^2}{c^2}\iiint_H[\mathfrak{A}_m,\ \mathfrak{A}_n]dxdydz$$

となるから[141]，

$$E=\frac{1}{8\pi}\sum_{m,n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_m(t)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n(t)+\frac{4\pi^2\rho_m{}^2}{c^2}\tilde{q}_m(t)\tilde{q}_n(t)\right)$$

$$\cdot\iiint_H[\mathfrak{A}_m,\ \mathfrak{A}_n]dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_m(t)\right)^2+4\pi^2\rho_m{}^2\left(\tilde{q}_m(t)\right)^2\right]$$

である．しかるに $\tilde{q}_1,\ \tilde{q}_2,\ \cdots\cdots$ は場の瞬間的な状態を記述する座標，すなわち，$\boldsymbol{L}$ の状態空間の座標とみなすことができるから，公式

$$E=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n\right)^2+4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{q}_n{}^2\right)$$

から共役な運動量 p_n（古典力学的！）が

---

141) つまり，$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ の法線成分が $\boldsymbol{H}$ の境界でゼロとなれば，

$$[\mathfrak{a},\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{b}]-[\mathrm{rot}\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}]=\mathrm{grad}\ (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})$$

によって（$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ と $\mathfrak{b}$ のいわゆる外積，ベクトル積である）

$$\iiint_H[\mathfrak{a},\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{b}]dxdydz=\iiint_H[\mathrm{rot}\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}]dxdydz$$

が成り立つ．$\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ は $\mathfrak{a}$ および $\mathfrak{b}$ に垂直だから，$\mathfrak{a}$ または $\mathfrak{b}$ が $\boldsymbol{H}$ に垂直であれば，確かに $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$ の法線成分は $\boldsymbol{H}$ の境界で消える．$\mathfrak{a}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_m$，$\mathfrak{b}=\mathfrak{A}_n$ だから，確かに $\mathfrak{b}$ が $\boldsymbol{H}$ に垂直である．

$$\tilde{p}_n=\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n\right)}E=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n,$$

$$E=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{p}_n{}^2+4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{q}_n{}^2)$$

のようにきまる（I.2 をみよ）. ところが，これから古典力学的に運動方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{p}_n=-\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_n}E=-4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{q}_n,\quad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}_n=\frac{\partial}{\partial\tilde{p}_n}E=\tilde{p}_n,$$

すなわち，

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{q}_n+4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{q}_n=0$$

がでてくるが，これはまさに Maxwell の方程式から導かれる（A_2.）である．したがって，つぎの Jeans の定理が成り立つ：

輻射場 L は，場を記述する瞬間瞬間のベクトル・ポテンシャル $\mathfrak{A}$ と

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(xyz)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n\bar{\mathfrak{A}}(xyz)$$

によって結びつけられた座標 $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$, …… によって，エネルギー（ハミルトン函数）

$$E=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{p}_n{}^2+4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{q}_n{}^2)$$

を媒介として純粋に古典力学的に記述することができる．

直線上に保持された質量1の点が，その座標を $\tilde{q}$ として，$C\tilde{q}^2$, $C=2\pi^2\rho^2$ で表わされるポテンシャルの場のなかにあるときのエネルギーは

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}\right)^2+4\pi^2\rho^2\tilde{q}^2\right]$$

である．あるいは，やはり $p=\frac{\partial}{\partial t}\tilde{q}$ であるから

$$\frac{1}{2}(p^2+4\pi^2\rho^2\tilde{q}^2)$$

である．ゆえにそれの運動方程式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{q}+4\pi^2\rho^2\tilde{q}=0$$

で，その解は

$$\tilde{q}=\gamma\cos 2\pi\rho(t-\tau)\quad(\gamma,\ \tau\ \text{は任意})$$

である．その運動の形態からして，この系は“振動数 ρ の線型振動子”とよばれる．したがって $\boldsymbol{L}$ は，空洞 $\boldsymbol{H}$ の固有振動数 $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots$ に等しい振動数をもつような線型振動子の列を合わせたものである．

電磁場のこの“力学的記述”は，通常の方法によってただちに量子力学的に解釈しなおすことができるという意味で重要である：$\boldsymbol{L}$ の状態空間は $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \cdots\cdots$ で記述されるから，Eの表式において $\tilde{p}_n, \tilde{q}_n$ を $\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{q}_n}\cdots\cdots$ および $\tilde{q}_n\cdots\cdots$ でおきかえる――これらの作用素をそれぞれ $\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n$ とよぶ．こうして問題1. および 2. β) の答がえられた．とくに

$$\mathrm{H}_l=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{P}_n{}^2+4\pi^2\rho_n{}^2\tilde{Q}_n{}^2)$$

は，2. β) において見出さねばならなかった作用素である．H_0 が知れているものとしたから，2. α) ははじめから解けている．したがって，なお残っているのは 2. γ) だけであるが，これはもはや，なんの困難ももたらさない．

古典電気力学的には $\boldsymbol{S}$ と $\boldsymbol{L}$ との相互作用はつぎのように計算される：$\boldsymbol{S}$ は荷電および質量がそれぞれ $e_1, m_1, \cdots\cdots, e_l, m_l$ の l 個の粒子，例えば陽子と電子からできているとし，それらのデカルト座標を $x_1=q_1,\ y_1=q_2,\ z_1=q_3, \cdots\cdots, x_l=q_{3l-2},\ y_l=q_{3l-1},\ z_l=q_{3l}$（これらは以前に ξ という記号で表わした），これらに対応する運動量を $p_1{}^x, p_1{}^y, p_1{}^z, \cdots\cdots, p_l{}^x, p_l{}^y, p_l{}^z$ とする．そうすると相互作用は（十分な近似で）

$$\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{cm_\nu}(p_\nu{}^x\mathfrak{A}_x(x_\nu, y_\nu, z_\nu)+p_\nu{}^y\mathfrak{A}_y(x_\nu, y_\nu, z_\nu)+p_\nu{}^z\mathfrak{A}_z(x_\nu, y_\nu, z_\nu))^{142)}$$

となる．量子力学におけるこれに対応する作用素は，$p_\nu{}^x,\ p_\nu{}^y,\ p_\nu{}^z,\ x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu$ $(\nu=1, \cdots\cdots, l)$ を作用素

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\cdots\cdots,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y_\nu}\cdots\cdots,\ \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z_\nu}\cdots\cdots,\ x_\nu\cdots\cdots,\ y_\nu\cdots\cdots,\ z_\nu\cdots\cdots$$

――これらは $P_\nu{}^x,\ P_\nu{}^y,\ P_\nu{}^z,\ Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z$ と書くことができよう――でおきかえることによって得られる．さらに，

$$\mathfrak{A}(x, y, z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{Q}_n\mathfrak{A}_n(x, y, z)$$

に注意すれば，求める H_w は

142) 例えば前掲 138) をみよ．

$$\mathsf{H}_w=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{cm_\nu}\tilde{Q}_n\{P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)$$
$$+P_\nu{}^y\mathfrak{A}_{n,y}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+P_\nu{}^z\mathfrak{A}_{n,z}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)\}$$

となる．しかしながら，ここで注意しなければならないのは，積 $p_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)$, …… を作用素でおきかえるときに，かってに $P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)$ という順序を決めてしまったことである． われわれは同じように $\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)P_\nu{}^x$ をとることもできたし，生ずる作用素のエルミート性を保障するためには，もともと

$$\frac{1}{2}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)P_\nu{}^x)$$

のような対称な形が要求されていたのである．幸いなことに，

$$[P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots]-[\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)P_\nu{}^x+\cdots\cdots]$$
$$=[P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)-\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)P_\nu{}^x+\cdots\cdots\text{[143]}$$
$$=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots$$
$$=\frac{h}{2\pi i}\mathrm{div}\,\mathfrak{A}_n(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)=0$$

であるから，これら3つはなんの違いも生じないのである．

こうして，われわれの系 $\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}$ の全エネルギー， あるいはその作用素

$$\mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\mathsf{H}_l+\mathsf{H}_w$$

が正確に与えられるであろう．しかし，H をさらに変形してゆくまえになおつぎのことに注意する：すなわち，$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}$ の状態空間は座標ξ（すなわち，$q_1,\cdots\cdots,q_{3l}$ あるいは $x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots\cdots,\ x_l,\ y_l,\ z_l$）および $\tilde{q}_1,\ \tilde{q}_2,\ \cdots\cdots$ で記述されるが，波動函数もまたこれらに依存する．ところで，無限に多い自由度をもった系，あるいは無限個の変数をもった波動函数を許容するのは形式的に不便であり，気がかりなことである——これまでに示してきたことはすべて有限個の座標だ

143） $P_\nu{}^x$ は $Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z$ とは交換し，$Q_\nu{}^x$ とだけ交換しないのだから，以下の変形を正当化するためには，つぎの関係を証明しなければならない（よぶんな指標をはぶき，$\mathfrak{A}$ を F でおきかえてある）：

$$PF(Q)-F(Q)P=\frac{h}{2\pi i}F'(Q).$$

ただし $P=\dfrac{h}{2\pi i}\dfrac{\partial}{\partial q}\cdots\cdots$, $Q=q\cdots\cdots$ である．この，とりわけ行列理論にとっては重要な関係は，直接計算すれば容易に証明される．

けに関連していた．それで，はじめは，$\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \cdots\cdots$ のうち最初のN個 $\tilde{q}_1, \cdots\cdots, \tilde{q}_N$ だけに考慮を限って（すなわち，$\mathfrak{A}$ を $\overline{\mathfrak{A}}_1, \cdots\cdots, \overline{\mathfrak{A}}_N$ の１次結合に制限する），できあがった結果においてはじめて必要な極限移行 $N\to+\infty$ をおこなうことにする．

そうすると

$$\mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\tilde{P}_n^2+4\pi^2\rho_n^2\tilde{Q}_n^2)$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{cm_\nu}\tilde{Q}_n\{P_\nu^x\overline{\mathfrak{A}}_{n,x}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)$$
$$+P_\nu^y\overline{\mathfrak{A}}_{n,y}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)+P_\nu^z\overline{\mathfrak{A}}_{n,z}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)\}$$

となる．$\tilde{P}_n, \tilde{Q}_n$ の代りに（エルミートでない！）作用素 $\tilde{R}_n$ とそれに共役な $\tilde{R}_n{}^*$ を導入するのが便利である：

$$\tilde{R}_n=\frac{1}{\sqrt{2h\rho_n}}(2\pi\rho_n\tilde{Q}_n+i\tilde{P}_n),$$
$$\tilde{R}_n{}^*=\frac{1}{\sqrt{2h\rho_n}}(2\pi\rho_n\tilde{Q}_n-i\tilde{P}_n).$$

すると

$$\tilde{Q}_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}(\tilde{R}_n+\tilde{R}_n{}^*)$$

であり，$\tilde{P}_n\tilde{Q}_n-\tilde{Q}_n\tilde{P}_n=\frac{h}{2\pi i}1$ によって，

$$\tilde{R}_n\tilde{R}_n{}^*=\frac{1}{2h\rho_n}(\tilde{P}_n^2+4\pi^2\rho_n^2\tilde{Q}_n^2)+\frac{1}{2}\cdot 1,$$
$$\tilde{R}_n{}^*\tilde{R}_n=\frac{1}{2h\rho_n}(\tilde{P}_n^2+4\pi^2\rho_n^2\tilde{Q}_n^2)-\frac{1}{2}\cdot 1.$$

したがって，とくに

$$\tilde{R}_n\tilde{R}_n{}^*-\tilde{R}_n{}^*\tilde{R}_n=1.$$

そしてエネルギーの式は

$$\mathsf{H}=\mathsf{H}_0+\sum_{n=1}^{N}h\rho_n\cdot\tilde{R}_n{}^*R_n+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{2\pi cm_\nu}\sqrt{\frac{h}{2\rho_\nu}}(\tilde{R}_n+\tilde{R}_n{}^*)$$
$$\cdot[P_\nu^x\overline{\mathfrak{A}}_{n,x}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)+P_\nu^y\overline{\mathfrak{A}}_{n,y}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)+P_\nu^z\overline{\mathfrak{A}}_{n,z}(Q_\nu^x,\ Q_\nu^y,\ Q_\nu^z)]$$
$$+C$$

となる．ただしCは定数で $=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}h\rho_n$．エネルギーの表式における加算的な

定数は意味がないから，Cはおとすことができる．それは，$N\to+\infty$ に対してCが無限大になって理論の意味のある帰結をそこなうことからも必要である．

エルミート作用素 $R_n{}^*R_n$ は超極大で，しかも 0, 1, 2, …… という数からなる純粋の点スペクトルをもっている．それに対応する固有函数を $\psi^n{}_0(\tilde{q}_n)$, $\psi^n{}_1(\tilde{q}_n)$, $\psi^n{}_2(\tilde{q}_n)$, …… と書こう．

[変数 $\tilde{q}_n$ の代りにむしろ $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{\rho_n}}q$ と書くことにすると，

$$\frac{1}{\sqrt{2h\rho_n}}2\pi\rho_n\tilde{q}_n=2\pi\sqrt{\frac{\rho_n}{2h}}\tilde{q}_n \quad \text{および}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2h\rho_n}}\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_n}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\tilde{q}_n}$$

はそれぞれ $\frac{1}{\sqrt{2}}q$ および $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q}$ となり，したがって

$$\tilde{R}_n=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q+\frac{\partial}{\partial q}\right),\quad \tilde{R}_n{}^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q-\frac{\partial}{\partial q}\right),$$

$$\tilde{R}_n\tilde{R}_n{}^*=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{1}{2}q^2+\frac{1}{2},$$

$$\tilde{R}_n{}^*\tilde{R}_n=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{1}{2}q^2-\frac{1}{2}$$

となる．これらの作用素の固有値理論は多くの著書のなかに見出される．例えば，Courant-Hilbert：261 頁，式 (42), (43)，およびこれに加えて 76 頁，式 (60), (61)．あるいは，Weyl：*Gruppentheorie und Quantenmechanik* 74 頁以下（邦訳 76 頁以下）]

$\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$, …… はξ空間の完全直交系を，$\psi^n{}_0(\tilde{q}_n)$, $\psi^n{}_1(\tilde{q}_n)$, …… は $\tilde{q}_n$ 空間におけるそれをつくるから，

$$\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}(\xi\tilde{q}_1,\cdots\cdots\tilde{q}_N)=\psi_k(\xi)\cdot\psi^1{}_{M_1}(\tilde{q}_1)\cdots\cdots\psi^N{}_{M_N}(\tilde{q}_N),$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ M_1,\ \cdots\cdots,\ M_N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

は ξ, $\tilde{q}_1$, ……$\tilde{q}_N$ 空間，すなわち状態空間における完全直交系をつくる．すべての波動函数 $\Phi=\Phi(\xi,\ \tilde{q}_1,\ \cdots\cdots,\ \tilde{q}_N)$ は

$$\Phi(\xi,\ \tilde{q}_1\cdots\cdots\tilde{q}_N)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{M_N=0}^{\infty}a_{kM_1\cdots\cdots M_N}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}(\xi\tilde{q}_1\cdots\cdots\tilde{q}_N)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{M_N=0}^{\infty}a_{kM_1\cdots\cdots M_N}\psi_k(\xi)\cdot\psi^1{}_{M_1}(\tilde{q}_1)\cdots\cdots\psi^N{}_{M_N}(\tilde{q}_N)$$

のように展開できる．完全直交系および展開係数に1個でなく $N+1$ 個の指標 $k, M_1, \cdots\cdots, M_N$ で番号をつけるということは，II.2 の考察を基礎にしてみれば本質的なことではない．波動函数Φのヒルベルト空間は，($N+1$ 重の）数列 $a_{kM_1\cdots\cdots M_N}$ （$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M_1=0}^{\infty}\cdots\cdots\sum_{M_N=0}^{\infty}|a_{kM_1\cdots M_N}|^2$ が有限な）からなるヒルベルト空間としても把握されるということが確められる．ヒルベルト空間をこのように把握したとき，H はどのような作用素であろうか？ それを知るために，まず $\mathrm{H}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}$ を計算しよう．H_0 は ξ のみに作用し，$\psi_k(\xi)$ は固有値 W_k の H_0 の固有函数であり，さらに，$\tilde{R}_n{}^*\tilde{R}_n$ は $\tilde{q}_n$ のみに作用し，$\psi^n{}_{M_n}(\tilde{q}_n)$ は $\tilde{R}_n{}^*\tilde{R}_n$ の固有値 M_n の固有函数であるから，

$$\mathrm{H}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}=(W_k+\sum_{n=1}^{N}h\rho_n\cdot M_n)\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}+\sum_{n=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{2\pi cm_\nu}\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}$$
$$\times[P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+P_\nu{}^y\mathfrak{A}_{n,y}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)$$
$$+P_\nu{}^z\mathfrak{A}_{n,z}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)]\psi_n(\xi)$$
$$\times\psi^1{}_{M_1}(\tilde{q}_1)\cdots\cdots(\tilde{R}_n+\tilde{R}_n{}^*)\psi^n{}_{Mn}(\tilde{q}_n)\cdots\cdots\psi^N{}_{M_N}(\tilde{q}_N)$$

となる．変数ξだけに関係する（[　]で包んだ表式のように）すべての作用素には，展開

$$A\psi_k(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}(A\psi_k,\ \psi_j)\cdot\psi_j(\xi)=\sum_j(A)_{kj}\cdot\psi_j(\xi)$$

を適用できる．ここで

$$(A)_{kj}=(A\psi_k,\ \psi_j)$$

と定義されている．さらに，うえにあげた個所で示されているように，

$$\tilde{R}_n\psi^n{}_M(\tilde{q}_n)=\sqrt{M}\psi^n{}_{M-1}(\tilde{q}_n),\quad \tilde{R}_n{}^*\psi^n{}_M(\tilde{q}_n)=\sqrt{M+1}\psi^n{}_{M+1}(\tilde{q}_n)$$

である（$M=0$ に対しては，第1の式の右辺は，そこにはいってくる意味のない $\psi^n{}_{-1}$ にはおかまいなく0に等しいとおく）．したがって，

$$\mathrm{H}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}=\left(W_k+\sum_{n=0}^{N}h\rho_n\cdot M_n\right)\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_n}+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}$$
$$\left(\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{2\pi cm_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{kj}\right)$$

$$\times(\sqrt{M_n+1}\Phi_{jM_1\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots M_N}+\sqrt{M_n}\Phi_{jM_1\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_N})$$

である．ところで H の形を $a_{kM_1\cdots\cdots M_n}$ に作用するものとして求めることができる．すなわち，

$$\mathrm{H}a_{kM_1\cdots\cdots M_N}=a'_{kM_1\cdots\cdots M_N}=\left(W_k+\sum_{n=1}^{N}h\rho_n\cdot M_n\right)a_{kM_1\cdots\cdots M_N}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}\left(\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{2\pi cm_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{kj}\right)$$

$$\times(\sqrt{M_n}a_{jM_1\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_N}+\sqrt{M_n+1}a_{jM_1\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots M_N})$$

として

$$\mathrm{H}\sum_{kM_1\cdots\cdots M_N}a_{kM_1\cdots\cdots M_N}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}=\sum_{kM_1\cdots\cdots M_N}a'_{kM_1\cdots\cdots M_N}\Phi_{kM_1\cdots\cdots M_N}.$$

これで H についての議論は，極限移行 $N\to\infty$ を遂行してもよいところまできた．そのさい，$a_{kM_1\cdots\cdots M_N}$ の指標のつけかたが変わるから，まったく新しい H 作用素ができるのである．無限に多くの指標 M_1, M_2, …… をもった成分 $a_{kM_1M_2}\cdots\cdots$ を導入しなければならないが，H にはいってくる和 $\sum_{n=1}^{\infty}h\rho_n\cdot M_n$ が有限になることを保障するためだけにも，有限個のものだけが 0 と異なるような数列 M_1, M_2, …… に限らなければならない．したがって，これからあと有限な

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{M_1=0}^{\infty}\sum_{M_2=0}^{\infty}\cdots\cdots|a_{kM_1M_2\cdots\cdots}|^2$$

をもつ数列 $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ の全部からなるヒルベルト空間をつくる．そのさい指標 k, M_1, M_2, …… の動く範囲は，

$$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\quad M_1,\ M_2,\ \cdots\cdots=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

で，有限個の（しかし任意個の）M_n だけが $\neq 0$ である[144]．H の最終的な形は

144）このように書かれた指標の系 k, M_1, M_2, …… が実際に数列をつくることは，つぎのようにして極めて簡単にわかる：π_1, π_2, π_3, …… を素数 2, 3, 5, …… の列とする．積 $\pi_1{}^{k-1}\pi_2{}^{M_1}\pi_3{}^{M_2}\cdots\cdots$ を考えると，有限個の例外を別とすればすべて $M_n=0$，したがって因数 $\pi_{n+1}^{M_n}=1$ であるから，この積は，実際に有限である．k, M_1, M_2, …… がわれわれの指標系すべてにわたって動けば $\pi_1{}^{k-1}\pi_2{}^{M_1}\pi_3{}^{M_2}\cdots\cdots$ の値はすべての数 1, 2, 3, …… を，しかもいずれも一度ずつとる．したがって，$a_{kM_1M_2}\cdots\cdots$ に 1 重の流通指標をつけなおすのに $\pi_1{}^{k-1}\pi_2{}^{M_1}\pi_3{}^{M_2}\cdots\cdots$ を利用することができる．

$$\mathrm{H}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=a'_{kM_1M_2\cdots\cdots}=\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}h\rho_nM_n\right)\cdot a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{kj}{}^n(\sqrt{M_n+1}a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots}+\sqrt{M_n}a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots})$$

となる．ただし $w_{kj}{}^n$ は

$$w_{kj}{}^n=\sqrt{\frac{h}{2\rho_n}}\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{2\pi cm_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{kj}$$

によって定義される．

われわれにとって興味のある物理的な結論をこの結果から引き出すまえに，それが光の電気力学的理論にもとづいてえられたことをあらためて想いおこそう．これまで行ってきた型通りの量子力学的な変形が光の波動像からの離反——とりわけ本当はバラバラで粒子的な光の本性——を反映するにたるものであったかどうかをまず第1に確めなければなるまい．（事実，この粒子的性質を把握するためには，われわれがここで行ったように電磁場を“量子化”するかわりに，直接光の粒子像から出発すべきであった，とも考えられるであろう．）

Hに対する表式をみると，それはなにか光の粒子のようなものをつかまえていることがただちにわかる．それはつぎの理由による．1種の摂動を表わしている第2項を省略しよう．この項は，まもなくわかるように，1つの“定常”状態から他の定常状態への系 S の量子飛躍（すなわち本来われわれにとって興味のある現象であるが，それはつねに物質の系 S およびすでに存在している輻射よりもはるかに弱い．このあとの2つは，以下でみるように，Hの第1項に体現されている）をひきおこすのである．そうすると，

$$\mathrm{H}_1a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}h\rho_n\cdot M_n\right)a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

が残る．このエネルギーの表式はつぎのように解釈することができる：それは系 S のエネルギー W_k にエネルギー $h\rho_nM_n$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) を加えたものであり，そのさい数 $M_n=0, 1, 2, \cdots\cdots$ をそれぞれエネルギー $h\rho_n$ をもった粒子の数として理解するのが自然である——ところで $h\rho_n$ は，Einstein によると振動数 ρ_n の光量子に帰すべきエネルギーにほかならない（注 134）をみよ）．したがって H_1 の構成については，つぎのような推測がもっともらしい：

$\boldsymbol{H}$ のなかにある電磁場（静電気的な部分をのぞいたもの），したがって $\boldsymbol{L}$ はもともと振動数 $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots$ およびエネルギー $h\rho_1, h\rho_2, \cdots\cdots$ をもった光量子から成り立っており，その各々の数は添字 $M_1, M_2, \cdots\cdots$ $(=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ である．ちょうど $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots$ に等しい振動数以外は顧慮されないということは，これらが $\boldsymbol{H}$ の固有振動数であることによって，なっとくすることができる：実際，ベクトルポテンシャル

$$\mathfrak{A}_n(xyz)\cdot\gamma\cos 2\pi\rho_n(t-\tau)$$

は $\boldsymbol{H}$ のなかで可能なただ1つの定常な電磁気的振動を表わしている．

しかしながら，これらの思弁や解釈は発見法的な価値をもつのみであり，われわれの問題に対する満足すべき決定的な解答は，輻射 $\boldsymbol{L}$ に対する光量子モデルから出発してエネルギーの表式 H に到達するのに成功したときにはじめて与えられる．われわれが最初に古典論的な考察を行った理由は，光量子と物質との相互作用（この点で古典電気力学を解釈しなおすことが遂行できなくなった）に対するいかなる手がかりもなかったということである．——しかし，いまでは，一般的な相互作用エネルギーを使って導かれる結果が形のうえで H と一致するならば，この相互作用の項を係数の比較によって決定することができるであろう．

光量子仮設を基礎におけば，$\boldsymbol{L}$ の状態空間はいかなるものとなるか（問題1.）? 個々の光量子（空洞 $\boldsymbol{H}$ のなかの）はなんらかの座標によってしるしづけられるであろう．そのような座標の総体を記号 u で表すことにしよう[145]．

---

145) 光量子の座標としては，たとえば，それの運動量 p_x, p_y, p_z および偏光状態を記述する座標 π が使われる．p_x, p_y, p_z は光量子の方向，すなわちそれの方向余弦 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z(\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=1)$ および振動数 ν，波長 λ そしてエネルギーを決定する：なぜなら Einstein によると運動量ベクトルは絶対値 $h\nu/c$ をもち（注 134）をみよ），したがって

$$p_x=\frac{h\nu}{c}\alpha_x, \qquad p_y=\frac{h\nu}{c}\alpha_y, \qquad p_z=\frac{h\nu}{c}\alpha_z.$$

すなわち

$$\nu=\frac{c}{h}\sqrt{p_x^2+p_y^2+p_z^2}, \quad \lambda=\frac{c}{\nu}, \quad \text{エネルギー}=h\nu,$$

$$\alpha_x=\frac{cp_x}{h\nu}, \quad \alpha_y=\frac{cp_y}{h\nu}, \quad \alpha_z=\frac{cp_z}{h\nu}$$

である．

このさい，われわれの固有振動 $\mathfrak{A}_n(xyz)\cdot\gamma\cos 2\pi\rho_n(t-\tau)$ が，空洞 $\boldsymbol{H}$ のなかでは反射する壁のためにそうならざるをえないように，定常的な光波であること——その結果

それの（$\boldsymbol{H}$ における）定常状態は波動函数 $\psi_1(u), \psi_2(u), \cdots\cdots$（それらは規格化された完全直交系を作る）およびエネルギー $E_1, E_2, \cdots\cdots$ をもつであろう——これらは振動数 $\rho_1, \rho_2, \cdots\cdots$ をもった電磁的固有振動 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots\cdots$ に対応する（Einstein 的な見地からすると $E_n=h\rho_n$ でなければならないが，われわれはこれも証明するであろう）．ここでなお以下の事実に注意しなければならない：すでに電磁気的な考察において，光のエネルギーの最小値が 0 であるようにエネルギーの規準を決めた．それは $M_1=M_2=\cdots\cdots=0$ という添字に対応していた．こうして，存在しないというのも光の可能な状態の１つとみなされてきたのであったし，またこのことは実際に正しいと認められる．事実，光量子はたしかに放出されたり吸収されたりする．いいかえると生成したり，消滅したりすることができる．しかしながらこのような考え方は量子力学にはまったく異質的なものである：各粒子は系の状態空間にその座標を寄与するから，全系の形式的記述のなかに非常に緊密にはいりこんでおり，そのため各粒子は絶対的に消滅することはありえないのである——消滅のあとにもその座標が状態空間に属するように，消滅後の各粒子に一種の潜在的な存在を与えなけ

$\mathfrak{A}_n$ は“輻射の方向”$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ のどれにも関連することができないということが気にかかる．$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ のほかに少くとも反対方向 $-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z$ もあり，同じことは運動量についても成り立つことは，ただちにわかる．したがってわれわれは $\boldsymbol{H}$ においては p_x, p_y, p_z, π 以外の座標を用いなければならない．

この具合の悪い事態をまぬがれるために，つぎのような新しい表現が導入された．$\boldsymbol{H}$ を直方体

$$-A<x<A, \quad -B<y<B, \quad -C<z<C$$

とみなし，それの境界面 $x=\pm A, y=\pm B, z=\pm C$ は壁とはせずに，むしろ $x=A$ は $x=-A$ と，$y=B$ は $y=-B$, $z=C$ は $z=-C$ と同一視する．すなわち，壁 $x=A$ に A, y, z という点で当った光は，あたかも何事もおこらなかったように，$-A, y, z$ からその進行を続ける，等々（たとえば L. Landau および R. Peierls の論文，Z. Physik Bd. **62**〔1930〕を参照）．またつぎのようにいうこともできる：空間は x, y, z 方向にそれぞれ週期 $2A, 2B, 2C$ でくり返される．

解析的なとり扱いは変らないが，ただ境界条件がこんどは（境界において $\frac{\partial}{\partial n}\mathfrak{A}=0$ のかわりに）

$$\mathfrak{A}(A, y, z)=\mathfrak{A}(-A, y, z),$$
$$\mathfrak{A}(x, B, z)=\mathfrak{A}(x, -B, z),$$
$$\mathfrak{A}(x, y, C)=\mathfrak{A}(x, y, -C)$$

となり，展開に使われる“要素解”は（$\overline{\mathfrak{A}}(x, y, z)\ \bar{\rho}(t)$ のかわりに）

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[2\pi\nu(t-c(\alpha_x x+\alpha_y y+\alpha_z z))]$$

となる．固有解に属する $\nu=\rho n$ および $\alpha_x=\alpha_{n,x}, \alpha_y=\alpha_{n,y}, \alpha_z=\alpha_{n,z}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ は容易に決定され，それから先の理論構成は本文中に与えたのと同じように行われる．

ればならない．このようにして，$\psi_n(u)$ のうちエネルギー $E_n=0$ をもつ状態は光量子の存在しないことに対応しなければならない——われわれはこれを $\psi_0(u)$ と表わすことにしたい（$E_0=0$)．したがって，$\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, …… は存在する光量子に対応するが，$\psi_0(u)$, $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$, …… となってはじめて完全直交系を作る．

そこで，すべての光量子からなる系 $\boldsymbol{L}$ へ移る．存在しない光量子も一緒に数えるのであるから，$\boldsymbol{L}$ は，この数よりも多くの光量子はけっして生じえないという数の光量子から成り立っている：いいかえると無限に多くのものから成り立っている．しかし最初から $\boldsymbol{L}$ の無限に多くの構成部分をとりあつかうのは不便であるから，まずはじめは，S 個の光量子しか存在しないかのように考えて進もう（$S=1, 2, \ldots\ldots$)．そして最後に極限移行 $S\to+\infty$ を行うことにする[146]．これらの S 個の光量子に番号 $1, \ldots\ldots, S$ をつけ，それの座標を $u_1, \ldots\ldots, u_S$ とよぶことにしよう．したがって $\boldsymbol{L}$ の状態空間は $u_1, \ldots\ldots u_S$ によって記述され，$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}$ のそれは $\xi, u_1, \ldots\ldots, u_S$ によって記述される．それゆえ，$\boldsymbol{S}+\boldsymbol{L}$ に対するもっとも一般的な波動函数は $f(\xi, u_1, \ldots\ldots, u_S)$ であり，$\varphi_k(\xi)$, $\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$, $k=1, 2, \ldots\ldots, n_1, \ldots\ldots, n_s=0, 1, 2, \ldots\ldots$ は完全直交系を作る．

さて光量子はおたがいに全く同一であるという基本的な性質をもっている．いいかえると，座標が一致した値 u をもつ2つの光量子をたがいに区別するいかなる手段も世界には存在しないのである．あるいはまた：m 番目および n 番目の光量子が u の値 $u_m=u'$, $u_n=u''$ をもつ状態は，$u_m=u''$, $u_n=u'$ である状態と区別されない（これは古典的ないい方であって量子力学的ではない，というのは，われわれは u の値を与えたが波動函数 $\varphi(u)$ を与えたのではなかったから！)．量子力学的にはこうなる：波動函数 $f(\xi, u_1, \ldots\ldots, u_m, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots, u_S)$ および $f(\xi, u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots, u_m, \ldots\ldots, u_S)$ に属する状態は区別することができない．すなわち：あらゆる物理量 $\mathfrak{R}$ はそれらの状態において同一の期待値をもつ（したがって，これはまた $F(\mathfrak{R})$ についても成り立つから，

146）この極限移行 $S\to+\infty$ は，電磁気学の理論で行われる極限移行 $N\to+\infty$ とは異っている！！というのは，かりにその場合の $M_1, M_2, \ldots\ldots$ を光量子の数と解釈したとすると，N は干渉しない光量子（すなわち，同一でない振動数，方向——これらは一緒にして運動量となる——および偏光性をもつ光量子：注 145）をみよ）の数に対する制限であったが，他方 S は単に光量子そのものの数に対する制限であるから．

同一の統計をもつ——III.1 で行った E_1., および E_2. にかんする議論をみよ). u_m と u_n を置換する函数作用素を O_{mn} で表わすと (O_{mn} はただちにわかるように同時にエルミートかつユニタリーである. $O^2_{mn}=1$), このことはつぎの関係を意味する: $\mathfrak{R}$ は f に対して $O_{mn}f$ に対すると同じ期待値をもつ, すなわち,

$$(Rf, f)=(RO_{mn}f, O_{mn}f)=(O_{mn}RO_{mn}f, f).$$

したがって

$$R=O_{mn}RO_{mn}, \text{ あるいはまた } O_{mn}R=RO_{mn}.$$

これは, いま問題にしている場合には, すべての　O_{mn} ($m, n=1, \cdots\cdots, S, m\neq n$) と交換可能であるような作用素$R$だけが, すなわち, ($O_{mn}$ の定義を考慮して) すべての座標 $u_1, \cdots\cdots, u_S$ が対称に入っているようなRだけが許されることを意味する.

すべての変数 $u_1, \cdots\cdots, u_S$ について対称な, すなわち

$$O_{m,n}f=f \quad (m, n=1, \cdots\cdots, S, m\neq n)$$

が成り立つような波動函数fからうえのような作用素Rによって移されたものは, やはり同じ性質をもつ:

$$O_{mn}Rf=RO_{mn}f=Rf.$$

これらの f は閉じた線型多様体, したがってあらゆるfのヒルベルト空間 $\mathfrak{R}_\infty^{(S)}$ のなかのヒルベルト部分空間 $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ を作る——そしてうえのRは $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ の要素を同じく $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ に属する要素に写像する. すなわちそれはヒルベルト空間 $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ における作用素とみなすことができる. それゆえ, $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ ははじめに考えていた $\mathfrak{R}_\infty^{(S)}$ とまったく同じように量子力学の目的に使うことができる. そうすると, 光量子の交換にかんする L の対称性を考えにいれれば, 対称な波動函数だけに限定する, つまり $\mathfrak{R}_\infty^{(S)}$ を $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ によっておきかえるべきではないのかという疑問がおこってくる. これをわれわれは実行しよう. それは, その結果, すなわち目的としている電磁気学的に導かれた H の表式との完全な合致, によってあとから正当化されるであろう[147].

$\varphi_k(\xi), \psi_{n_1}(u_1), \cdots\cdots, \psi_{n_S}(u_s)$ は $\mathfrak{R}_\infty^{(S)}$ において規格化された完全直交系を作るが, これを用いて $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ におけるそのような直交系を与えよう. M_0, M_1,

147) このように $\mathfrak{R}_\infty^{(S)}$ のかわりに $\overline{\mathfrak{R}}_\infty^{(S)}$ を導入することは, この処置の結果を量子力学を使わないで考察するならば通常の統計をいわゆる Bose-Einstein 統計でおきかえることに同等である. これについてはたとえば Dirac, さきの注 138) をみよ.

…… を

$$M_0+M_1+\cdots\cdots=S$$

であるような 0, 1, 2, …… に等しい任意の数（したがって，有限個のみが $\neq 0$!）とし，0 が M_0 回，1 が M_1 回……現われるようなすべての添字の系 $n_1, \cdots\cdots, n_S$——ちょうど $M_0!\cdot M_1!\cdots\cdots$ 個だけ異ったものがある——の全体を $[M_0, M_1, M_2, \cdots\cdots]$ で表わす．そして

$$\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)=\sum_{n_1\cdots\cdots n_S\in[M_0M_1\cdots\cdots]}\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$

とおく．

$\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}$ は $M_0!\cdot M_1!\cdots\cdots$ 個の，ノルムが 1 で，どの 2 つもたがいに直交する項の和であるから，それのノルムの 2 乗は 1 を $M_0!\cdot M_1!\cdots\cdots$ 個加えたものであり，したがってノルムは $\sqrt{M_0!M_1!\cdots\cdots}$ である．2 つの異った $\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}$ は，たがいに 2 つづつ直交する項からなるから，直交する．したがって

$$\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)=\frac{1}{\sqrt{M_0!M_1!\cdots\cdots}}\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

は規格化された直交系を作る．$u_1\cdots\cdots u_S$ について対称な $f(\xi, u_1, \cdots\cdots, u_S)$ は $\varphi_k(\xi)\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$ のすべての項と同一の内積をもつから，もしそれが $\varphi_k(\xi)\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$ と——すなわち $\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$ と——直交するならば，それの各項とも直交する．すなわち：もしそれがすべての $\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$ と直交すれば，それはまたすべての $\varphi_k(\xi)\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$ に直交する——したがって $\equiv 0$．したがって，（それ自体たしかに $\Re_\infty^{(S)}$ に属する）$\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$ は $\Re_\infty^{(S)}$ において完全な規格化直交系を作る．

つぎに **S+L** に現われるエネルギーを考察する．第 1 に **S** のエネルギーがある [2 α)]．**S** に対するエネルギーの作用素は，

$$\mathsf{H}_0\varphi_k(\xi)=W_k\varphi_k(\xi)$$

で定義されるから，**S+L** に対しては，

$$\mathsf{H}_0\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)=W_k\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

によって与えられる．第 2 に各光量子 l' はエネルギー

$$\mathsf{H}_l'\psi_n(u)=E_n\psi_n(u)$$

[2 β)] をもつから，**S+L** における第 m 番目（$m=1, \cdots\cdots, S$）の光量子は

$$\mathrm{H}_{\iota_m}\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_m}(u_m)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$
$$=E_{n_m}\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_m}(u_m)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$

をもち，

$$\mathrm{H}_\iota=\mathrm{H}_{\iota_1}+\cdots\cdots+\mathrm{H}_{\iota_S}$$

と書かれるべきである．最後に，[2 γ)] 光量子 l' の S との相互作用エネルギーをさしあたり詳しいことはわかっていない作用素Vによって表わすことにする．それをわれわれは，その行列によって表現する：

$$V_\iota'\varphi_k(\xi)\psi_n(u)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}V_{kn/jp}\varphi_j(\xi)\psi_p(u).$$

$S+L$ では，m番目の光量子に対してこれはつぎのようになる：

$$V_{\iota_m}\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_m}(u_m)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}V_{kn_m/jp}\varphi_j(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_p(u_m)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p_1\cdots p_m\cdots p_S=0}^{\infty}\delta(n_1-p_1)\cdots\cdots V_{kn_m/jp_m}\cdots\cdots\delta(n_S-p_S)$$
$$\times\varphi_j(\xi)\cdot\psi_{p_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{p_m}(u_m)\cdots\cdots\psi_{p_S}(u_S)$$

（$\delta(n)$ は $n=0$ に対して 1, $n\neq0$ に対して 0）．そして

$$\mathrm{H}_w=V_{\iota_1}+\cdots\cdots+V_{\iota_S}$$

とおかなければならない．

したがって，以上をまとめると：

$$\mathrm{H}\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$
$$=(W_k+E_{n_1}+\cdots\cdots+E_{n_S})\varphi_k(\xi)\cdot\psi_{n_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{n_S}(u_S)$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{p_1\cdots p_S=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{S}\delta(n_1-p_1)\cdots\cdots V_{kn_m/jp_m}\cdots\cdots\delta(n_S-p_S)$$
$$\times\varphi_j(\xi)\cdot\psi_{p_1}(u_1)\cdots\cdots\psi_{p_S}(u_S).$$

これから，かんたんな変形によってつぎの式が導かれる：

$$\mathrm{H}\varphi_k(\xi)\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)=\left(W_k+\sum_{n=0}^{\infty}M_nE_n\right)\varphi_k(\xi)\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,\,p=0}^{\infty}M_nV_{kn/jp}\varphi_j(\xi)\Phi_{M_0M_1\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

（$n=p$ のときは $\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots$ を $\cdots\cdots M_n\cdots\cdots$ でおきかえる）．

したがって規格化された直交函数に対しては：

$$\mathsf{H}\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)=\left(W_k+\sum_{n=0}^{\infty}M_nE_n\right)\varphi_k\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,\,p=0}^{\infty}\sqrt{M_n(M_p+1-\delta(n-p))}\,V_{kn/jp}\varphi_j(\xi)$$

$$\cdot\psi_{M_0M_1\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S).$$

$\overline{\mathfrak{R}}_\infty{}^{(S)}$ に属する一般的な $f(\xi,u_1\cdots\cdots u_S)$ をこの直交函数によって展開することができる：

$$f(\xi u_1\cdots\cdots u_S)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{M_0M_1\cdots=0\\(M_0+M_1+\cdots=S)}}^{\infty}a_{kM_0M_1\cdots\cdots}\varphi_k(\xi)\Psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

それゆえ $\overline{\mathfrak{R}}_\infty{}^{(S)}$ はまた，有限な

$$\sum_{kM_0M_1\cdots}|a_{kM_0M_1\cdots\cdots}|^2$$

をもつ列 $a_{kM_0M_1\cdots\cdots}$, $k=1,2,\cdots\cdots$, M_0, M_1, $\cdots\cdots=0,1,2,\cdots\cdots$, $M_0+M_1+\cdots\cdots=S$ として把握されるべきである．そのときには

$$\mathsf{H}a_{kM_0M_1\cdots\cdots}=a'_{kM_0M_1\cdots\cdots}$$

は

$$\mathsf{H}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{M_0M_1\cdots=0\\(M_0+M_1+\cdots=S)}}^{\infty}a_{kM_0M_1\cdots\cdots}\varphi_k(\xi)\Psi_{M_0M_1}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\substack{M_1M_2\cdots=0\\(M_1+M_2+=S)}}^{\infty}a'_{kM_0M_1\cdots\cdots}\varphi_k(\xi)\Psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

によって定義される．したがって

$$\mathsf{H}a_{kM_0M_1\cdots\cdots}=a'_{kM_0M_1\cdots\cdots}=\left(W_k+\sum_{n=0}^{\infty}M_nE_n\right)a_{kM_0M_1\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,\,p=0}^{\infty}\sqrt{M_n(M_p+1-\delta(n-p))}\,\overline{V_{kn/jp}}a_{jM_0M_1\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots}$$

(k, j および n, p は，$\varphi_k(\xi)\psi_{M_0M_1\cdots\cdots}(u_1\cdots u_S)$ の公式と比べてたがいの役割を交換する： $V_{jp/kn}$ となるべきところに，V のエルミート性を考えに入れて，$\overline{V_{kn/jp}}$ と書いたのである．)

さて，極限移行 $S\to+\infty$ のための準備を行うところにきた．M_0 は $M_0=S-M_1-M_2-\cdots\cdots$ のために M_1, M_2, $\cdots\cdots$ によって定められるから，

$a_{kM_1M_1\cdots\cdots}$ のかわりに $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ とかくことができる．そのさい添字は $k=1,$ $2, \cdots\cdots, M_1, M_2, \cdots\cdots=0, 1, 2, \cdots\cdots, M_1+M_2+\cdots\cdots\leqq S$ という条件で制約される．$E_0=0$ に注意し，

$$SV_{k0/j0}=V_{k/j},\quad \sqrt{S}\,V_{k0/jn}=V_{k/jn},\quad \sqrt{S}\,V_{kn/j0}=\bar{V}_{j/kn}$$

（$V_{kn/jp}$ はエルミート！）という記号を導入すると，つぎの式がえられる：

$$\mathsf{H}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=a'_{kM_1M_2}=\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}M_nE_n\right)a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}V_{k/j}a_{jM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{M_n}\sqrt{\frac{S-M_1-M_2-\cdots\cdots+1}{S}}V_{j/kn}a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{M_n+1}\sqrt{\frac{S-M_1-M_2-\cdots\cdots}{S}}\bar{V}_{k/jn}a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,p=1}^{\infty}\sqrt{M_n(M_p+1)}\,\bar{V}_{kn/jp}a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots}.$$

ここで $S\to+\infty$ を行うことができる：そうすると $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ はふたたび $k=1,$ $2, \cdots\cdots, M_1, M_2\cdots\cdots=0, 1, 2, \cdots\cdots$，有限個の（しかし任意に多くの）$M_n$ だけが $\neq 0$ であるようなすべての数列 $kM_1M_2\cdots\cdots$ について定義される（注 144）をみよ）．そして H に対してはつぎの式がえられる：

$$\mathsf{H}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=a'_{kM_1M_2\cdots\cdots}=\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}M_nE_n\right)a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}V_{k/j}a_{jM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{V}_{k/jn}\sqrt{M_n+1}\,a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots}+V_{j/kn}\sqrt{M_n}\,a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots}\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n,p=1}^{\infty}\bar{V}_{kn/jp}\sqrt{M_n(M_p+1)}\,a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots M_p+1\cdots\cdots}.$$

光の電磁理論から導き出された式との類似は明白である：完全な一致をめざすためには，ただ，

$$E_n=h\rho_n,\quad V_{k/j}=0,\quad V_{k/jn}=w_{jk}{}^n=\bar{w}_{kj}{}^n,\quad V_{kn/jp}=0$$

とおきさえすればよい．それゆえ光量子による解釈は，

1. 古典電磁理論を一般的な量子力学の図式にしたがって書きなおす：

2. 光量子のエネルギーは Einstein の規則にしたがって，その振動数の h 倍に等しいとおく：

3. 光量子と物質との相互作用エネルギーを正しく与える（V に対するうえの表式をみよ）

ならば，古典的な電磁理論による解釈と同一となる，ということがわかる．

このようにして量子論の初期の形態のもっていたもっとも深刻なパラドックスである光の 2 重性（電磁波とバラバラの粒子，光量子）が見事に解消された[148]．もちろん，すぐうえで計算した光と物質のあいだの相互作用エネルギー V に対して直接的な直観的な解釈を見出すことは困難である．それは，V の 0 と異なる唯一の行列要素 $V_{kn/jp}$（$n=0$, $p\neq0$ あるいは $n\neq0$, $p=0$ をもつもの）があらゆる可能な光量子の数 S に依存するから（それは $1/\sqrt{S}$ に比例する）——最後には $S\to+\infty$ としなければならないけれども——なおさら困難である．しかしながら，われわれは，モデル的な記述の仕方はすべて近似にしかすぎず，理論の正確な内容はまさしく，H-作用素に対する表式を仲介として与えられることを考えにいれて，このことを認容することができる．

ここで，われわれの本来の課題である遷移確率の決定の問題に帰ろう．時間に依存する Schrödinger の微分方程式にしたがえば，$a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=a_{kM_1M_2\cdots\cdots}(t)$ の変化は

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=-\mathrm{H}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=-\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}h\rho_n\cdot M_n\right)a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

---

148) この“2 重性”がどのように考えられたか，およびそれがどのようなパラドックスとして感じられたかについてのさらに詳しい論述は当時の文献に見出されるであろう．このためにはたとえば，注 6) にあげた研究をみよ．

個別的な粒子（電子，陽子）もまた波動函数によって記述され，かつ典型的な波動現象，たとえば格子回折などを示すから，量子力学は物質にも同じ 2 重性を附与するということがしばしばいわれた．(Davison-Germer の実験：Phys. Rev. Bd. **30** (1927)：Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A. Bd. **14** (1928)： さらに G. P. Thomson：Proc. Roy. Soc. Lond. Bd. **117** (1928) および Rupp：Ann. Physik Bd **85** (1928) を参照.）それに対して，量子力学がこの 2 つの“性質”を要素的現象の唯 1 つの統一的な理論から導き出すということを強調しなければならない．前期量子論のパラドックスは，経験の説明のために，2 つのたがいに矛盾する理論 (Maxwell-Hertz の光の電磁理論と Einstein の光量子理論）を交互に使わなければならなかったところから生じたのである．

$$-\sum_{=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{kj}{}^{n}(\sqrt{M_n+1}\,a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots}$$

$$+\sqrt{M_n}\,a_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots})$$

によって定められる. $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ の主要な変化はこの表式の第1項によって生ずるのであるから，それを

$$a_{kM_1M_2\cdots\cdots}(t)=e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(W_k+\sum_{n=1}^{\infty}h\rho_n\cdot M_n\right)t}\cdot b_{kM_1M_2\cdots\cdots}(t)$$

という仮定をおいて分離することが便利である；そうすると

$$\frac{\partial}{\partial t}b_{kM_1M_2\cdots\cdots}$$

$$=-\frac{2\pi i}{h}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{kj}{}^{n}(e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_j-W_k+h\rho_n)t}\sqrt{M_n+1}$$

$$\times b_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n+1\cdots\cdots}-e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_j-W_k-h\rho_n)t}\sqrt{M_n}$$

$$\times b_{jM_1M_2\cdots\cdots M_n-1\cdots\cdots}).$$

となる.

$a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ および $b_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ の物理的な意味は，それらの成り立ちによって決められる. 有限な $\overline{M}_0+\overline{M}_1+\overline{M}_2+\cdots\cdots=S$ の場合には

$$\varphi_{\bar{k}}(\xi)\Psi_{\bar{M}_0\bar{M}_1\cdots\cdots}(u_1\cdots\cdots u_S)$$

は S が k 番目の量子軌道にあり，状態 ψ_0, ψ_1, ψ_2, …… にある光量子がそれぞれ $\overline{M}_0$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, …… 個存在する——すなわち $\overline{M}_0$ 個が“存在していない”という状態にあり，$\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, …… がそれぞれ固有振動 $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, …… に属する状態にある——という状態であった. したがってこの波動函数に属する $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ は

$$a_{kM_1M_2\cdots\cdots}=\delta(k-\bar{k})\cdot\delta(M_0-\overline{M}_1)\cdot\delta(M_2-\overline{M}_2)\cdots\cdots$$

である（有限個の例外をのぞいてつねに $M_n=\overline{M}_n=0$ であるから有限個の因子のみが $\neq 1$ である). これはもちろん $S\to\infty$ のあとにも保持されなければならない. したがって $S+L$ の任意の状態 $a_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ に対してうえにのべた配位は（これが測定されるならば；III. 3 で縮退のない純粋な点スペクトルについて述べたことをみよ）確率

$$\left|\sum_{kM_1M_2\cdots\cdots}a_{kM_1M_2\cdots\cdots}\delta(k-\bar{k})\delta(M_1-\overline{M}_1)\delta(M_2-\overline{M}_2)\cdots\cdots\right|^2$$

$$=|a_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}|^2=|b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}|^2$$

をもつ．とくに，S が k 番目の量子軌道に見出されるという全確率は

$$\theta_{\bar{k}} = \sum_{\bar{M}_1 \bar{M}_2 \cdots\cdots} |b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}|^2$$

である．

最初の瞬間 ($t=0$) に原子が k 番目の状態にあり，そして状態 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots\cdots$ の光量子がそれぞれ $\bar{M}_1, \bar{M}_2 \cdots\cdots$ 個存在するとしよう——すなわち，

$$b_{kM_1M_2\cdots\cdots} = a_{kM_1M_2\cdots\cdots} = \delta(k-\bar{k})\cdot\delta(M_1-\bar{M}_1)\cdot\delta(M_2-\bar{M}_2)\cdots\cdots$$

そのとき，さきの微分方程式にしたがえば，第1近似で（すなわち，右辺をまだ不変として扱うようなことができるような短い時間 t に対して）一般につぎのような $\frac{\partial}{\partial t} b_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ だけが $\neq 0$ であるだろう．すなわち，それの $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n+1 \cdots\cdots$ あるいは，$M_1, M_2, \cdots\cdots M_n-1, \cdots\cdots$ が $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \cdots\cdots$ と一致するもの，つまりすべての $k, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \cdots\cdots \bar{M}_n \pm 1 \cdots\cdots$ をもつものである．これらに対しては積分によって

$$b_{k\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n+1\cdots\cdots} = w_{k\bar{k}}{}^n \frac{1-e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_{\bar{k}}-W_k-h\rho_n)t}}{W_{\bar{k}}-W_k-h\rho_n}\sqrt{\bar{M}_n+1}$$

$$b_{k\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n-1} = w_{k\bar{k}}{}^n \frac{1-e^{-\frac{2\pi i}{h}(W_{\bar{k}}-W_k-h\rho)t}}{W_{\bar{k}}-W_k-h\rho_n}\sqrt{\bar{M}_n}$$

がえられる．他のすべての $b_{kM_1M_2\cdots\cdots}$ はこの近似では $=0$ である．($b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}$ を除いて．これはいまの近似では，すなわち t^2 の項までの近似では，それの初期値1に等しくなければならない．しかしながら，

$$\frac{\partial}{\partial t} b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots} = 0$$

という結論は疑わしい．それはわれわれの微分方程式の右辺がこの場合は無限に多くの，いまの近似で消えない $b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n\pm1\cdots\cdots}$ を含み，したがって，これらの各項の小さいことから——小さい t に対して——それらの和の小さいことを結論するのは許されないからである．事実，そのつぎの近似を計算することによって，$b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}$ が t^2 の項ではなく，t の項で1からずれることが示される[149]．しかしながら，

$$\sum_{kM_1M_2\cdots\cdots} |b_{kM_1M_2\cdots\cdots}|^2 = \sum_{kM_1M_2\cdots\cdots} |a_{kM_1M_2\cdots\cdots}|^2 = 1,$$

---

149) この微分方程式のげんみつな解は Weisskopf と Wigner が与えた〔Z. Physik Bd. 63 (1930)〕．それによってこの主張が正当であることが認められる．

したがって

$$|b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}|^2=1-\sum_{kM_1M_2\cdots\cdots\neq\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}|b_{kM_1M_2\cdots\cdots}|^2$$

のために，この $b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots}$ を直接決定する必要はまったくない.)

ここで過程の定性的な性質をはっきり認めることができる：$\mathfrak{A}_n$ 光量子（振動数 ρ_n の）の放出に対応する $b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n+1\cdots\cdots}$ は，$W_{\bar{k}}-W_k-h\rho_n$ が小さければ小さいほど，すなわち，光の固有振動数 ρ_n が“Bohr の振動数” $\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$[150] に近ければ近いほど，ますます増大する：同様に，吸収に対応する $b_{\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n-1\cdots\cdots}$ は ρ_n が $\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}$ 近ければ近いほど増大する. Bohr の振動数の関係は，正確に成り立つのではないが（ρ_n はけっして全振動数をとりうるのではない），しかし——時間 t が短かく，しかも ρ_n が非常に密に並んでいるときには（それは大きな空間 $\boldsymbol{H}$ に対しては正しい）——圧倒的な確率で成り立つことがわかる. さらに $w_{k\bar{k}}{}^n$ もまたこの過程の頻度を高める——まもなくそれを遷移確率と同一であるとすることができるであろう.

$b_{k\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n\pm1\cdots\cdots}$ の公式からさらにつぎの関係が導かれる.

$$|b_{k\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n+1\cdots\cdots}|^2=\frac{2}{h^2}(\bar{M}_n+1)|w_{k\bar{k}}{}^n|^2\frac{1-\cos 2\pi\left(\rho_n-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)t}{\left(\rho_n-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)^2},\text{[151]}$$

$$|b_{k\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n-1\cdots\cdots}|^2=\frac{2}{h^2}\bar{M}_n|w_{k\bar{k}}{}^n|^2\frac{1-\cos 2\pi\left(\rho_n-\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)t}{\left(\rho_n-\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)^2},\text{[151]}$$

$|b_{kM_1M_2\cdots\cdots}|^2=0,\ kM_1M_2\cdots\cdots\neq\bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots,\ \bar{k}\bar{M}_1\bar{M}_2\cdots\cdots\bar{M}_n\pm1\cdots\cdots$ に対して.

これから θ_k, $k\neq\bar{k}$ に対してつぎの表式がえられる：

---

150) よく知られているように N. Bohr は 1913 年に（上掲の注 5）を参照），原子がエネルギー $W^{(1)}$ をもつ 1 つの定常状態からエネルギー $W^{(2)}$ の他の定常状態へ遷移するときに，振動数 $\dfrac{W^{(1)}-W^{(2)}}{h}$ の光を放出する（もちろん $W^{(1)}>W^{(2)}$）ことを確認した. われわれの場合には $\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$ がそれに対応する.

151)
$$|e^{ix}-1|^2=(e^{ix}-1)\overline{(e^{ix}-1)}=(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)$$
$$=2-e^{ix}-e^{-ix}=2-2\cos x=2(1-\cos x)$$

である.

$$\theta_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{h^2}(\overline{M}_n+1)|w_{k\bar{k}}{}^n|^2\frac{1-\cos 2\pi\left(\rho_n-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)t}{\left(\rho_n-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)^2}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{h^2}\overline{M}_n|w_{k\bar{k}}{}^n|^2\frac{1-\cos 2\pi\left(\rho_n-\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)t}{\left(\rho_n-\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)^2}.$$

(第1の $\sum_{n=1}^{\infty}$ は放出に，第2の $\sum_{n=1}^{\infty}$ は吸収に対応する）この θ_k をとじた形に書くことができるようにするには，ここで簡易化のための仮定をおかなければならない．すなわち一方では $\boldsymbol{H}$ を非常に大きい（すなわちその体積 $V\to\infty$）と仮定し，そして他方では $\boldsymbol{H}$ の固有振動 $\mathfrak{A}_n$ を統計的に扱うことにする．この目的のために，2つの和の各々において，ρ と $\rho+d\rho$ とのあいだの ρ_n に属するすべての項を1つにまとめる（$w_{k\bar{k}}{}^n$ にその値を代入し，$d\rho\ll\rho$ と仮定する）:

$$\frac{1}{4\pi^2c^2h\rho}\left[\sum_{\substack{n\\ \rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho}}\left|\sum_{\nu=1}^{l}\frac{c_\nu}{m_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{k\bar{k}}\right|^2(\overline{M}_n+1)\right]$$

$$\times\frac{1-\cos 2\pi\left(\rho-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)t}{\left(\rho-\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)^2},$$

および，この式で $\overline{M}_n+1$ のかわりに $\overline{M}_n$，$\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$ のかわりに $\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}$ とおいたもの，となる．つぎに，括弧［……］を決定しなければならない．

しかし $M_1, M_2\cdots\cdots$ の普通の記述の仕方はそれらの値を与えることでなく，それよりはるかに少いことを述べるにすぎない：すなわち，強度を与えること，いいかえると，スペクトル区間 ρ から $\rho+d\rho$ のあいだ，および単位体積に光のエネルギー $I(\rho)d\rho$ が分布する，という陳述である．これは，

$$\sum_{\substack{n\\ \rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho}}h\rho_n\cdot\overline{M}_n\approx h\rho\sum_{\substack{n\\ \rho\leqq\rho_n\leqq\rho+d\rho}}\overline{M}_n=V\cdot I(\rho)d\rho,$$

$$\sum_{\substack{n\\ \rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho}}\overline{M}_n=\frac{VI(\rho)}{h\rho}d\rho$$

を意味する．区間 $\rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho$ のなかの ρ_n の数は Weyl の一般的に有効

な漸近公式（さきの注 140）をみよ）によって $\frac{8\pi V\rho^2}{c^3}d\rho$ であり，したがって

$$\sum_{\substack{n \\ \rho\leqq\rho<\rho+d\rho}} (\overline{M}_n+1)\approx\frac{V\left(I(\rho)+\frac{8\pi h\rho^3}{c^3}\right)}{h\rho}d\rho.$$

したがって，うえにえられた［……］に対して，もし

$$\left|\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{m_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{k\bar{k}}\right|^2$$

が区間 $\rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho$ において平均値（それを $w_{k\bar{k}}(\rho)$ とよぶことにしよう）のまわりで（十分速く）揺動するならば，つぎの表式がえられる：

$$w_{k\bar{k}}(\rho)\frac{V\left(I(\rho)+\frac{8\pi h\rho^3}{c^3}\right)}{h\rho}d\rho \quad および \quad w_{k\bar{k}}(\rho)\frac{VI(\rho)}{h\rho}d\rho.$$

さらに $\frac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$ に対して $\nu_{\bar{k}k}$，$\frac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}$ に対して $\nu_{k\bar{k}}$ と書くことにすると問題の和に対してつぎの式がえられる：

$$\theta_k=\frac{V}{4\pi^2c^2h^2}\int_0^\infty\left\{\left((I(\rho)+\frac{8\pi h}{c^3}\rho^3\right)\frac{1-\cos 2\pi(\rho-\nu_{\bar{k}k})t}{(\rho-\nu_{\bar{k}k})^2}\right.$$
$$\left.+I(\rho)\frac{1-\cos 2\pi(\rho-\nu_{k\bar{k}})t}{(\rho-\nu_{k\bar{k}})^2}\right\}\frac{w_{k\bar{k}}(\rho)}{\rho^2}d\rho.$$

この積分は，分母 $(\rho-\nu_{\bar{k}k})^2$ あるいは $(\rho-\nu_{k\bar{k}})^2$ が小さくなるような積分領域の部分をのぞけば，小さい t に対して明らかに t^2 の程度の大きさである（なぜなら $1-\cos 2\pi ct$ がそうであるから）．積分領域のこの部分では，t^2 に比べて大きい寄与が生ずることがありうる．そしてもし実際そうであれば，この寄与が θ_k の漸近的な表式である．たしかにそうであることが実際に示される．というのは t の程度の大きさの寄与がえられるからである——したがってこれを決定することに進まねばならない．

$$\nu_{\bar{k}k}=-\nu_{k\bar{k}}=\frac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$$

であるから，$W_{\bar{k}}>W_k$ のときには第１項の分母だけが，$W_{\bar{k}}<W_k$ のときは第２項の分母だけが小さくなる——したがって $W_{\bar{k}}$ がそれぞれ $>$，$<W_k$ であるのに応じて，第１あるいは第２項だけを残す．さらに $\nu_{\bar{k}k}$ あるいは $\nu_{k\bar{k}}$——

かんけつに $\bar{\nu}_{k\bar{k}}=\frac{|W_{\bar{k}}-W_k|}{h}$ と記そう——から遠く離れている ρ は積分に t^2 の寄興しか与えないから，被積分函数をそれの $\rho=\bar{\nu}_{k\bar{k}}$ に対する値，すなわち

$$\frac{Iw_{k\bar{k}}(\bar{\nu}_{k\bar{k}})}{\bar{\nu}_{k\bar{k}}^2},$$

でおきかえることができる．ここで $I=I(\bar{\nu}_{\bar{k}\bar{k}})+\frac{8\pi h}{c^3}\bar{\nu}_{k\bar{k}}^3$，あるいは $=I(\bar{\nu}_{k\bar{k}})$ である．したがって：

$$\theta_k=\frac{VIw_{k\bar{k}}(\bar{\nu}_{k\bar{k}})}{4\pi^2c^2h^2\bar{\nu}_{k\bar{k}}^2}\int_0^\infty\frac{1-\cos 2\pi(\rho-\bar{\nu}_{k\bar{k}})t}{(\rho-\bar{\nu}_{k\bar{k}})^2}d\rho.$$

これはふたたび t^2 の寄与を表わすから，$\int_0^\infty$ を $\int_{-\infty}^\infty$ でおきかえ，それから新しい変数 $x=2\pi(\rho-\bar{\nu}_{k\bar{k}})t$ を導入することができる．

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos 2\pi(\rho-\bar{\nu}_{k\bar{k}})t}{(\rho-\bar{\nu}_{k\bar{k}})^2}d\rho=2\pi t\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx=^{152)}=2\pi^2t$$

のために，けっきよく

$$\theta_k=\frac{VIw_{k\bar{k}}(\bar{\nu}_{k\bar{k}})}{2h^2c^2\bar{\nu}_{k\bar{k}}^2}t$$

となる．これによってまた θ_k が t の程度の大きさであることが示された．

$w_{k\bar{k}}(\bar{\nu}_{k\bar{k}})$ を定めるには，

$$\left|\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{m_\nu}(P_\nu{}^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu{}^x,\ Q_\nu{}^y,\ Q_\nu{}^z)+\cdots\cdots)_{k\bar{k}}\right|^2$$

に対して $\mathfrak{A}_n$ にかかわらない表式を見出さなければならない．それは，$\mathfrak{A}_n$ の急激な揺動を考えて，$\mathfrak{A}_n$ を不規則な方向をもつ一定の長さのベクトル——一定であること，すなわち $Q_\nu{}^x$, $Q_\nu{}^y$, $Q_\nu{}^z$ に無関係であることのためにそれは数のベクトルに行列1をかけたものである——でおきかえることによって求められる．そしてその一定の長さ γ_n は規格化

$$\iiint_H[\mathfrak{A}_n,\ \mathfrak{A}_n]dxdydz=4\pi c^2$$

---

152)
$$\int_{-\infty}^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx=2\int_0^\infty\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int_0^\infty\frac{1-\cos(2y)}{y^2}dy$$
$$=2\int_0^\infty\frac{\sin^2 y}{y^2}dy=\pi$$
である（Courant-Hilbert，49頁をみよ）．

で決められる．したがって

$$V\gamma_n^2=4\pi c^2, \qquad \gamma_n^2=\frac{4\pi c^2}{V}.$$

x 成分 $\mathfrak{A}^2_{n,x}$ には，平均して $[\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_n]=\mathfrak{A}^2_{n,x}+\mathfrak{A}^2_{n,y}+\mathfrak{A}^2_{n,z}=\gamma_n^2$ の 1/3 がくるから，それは $1/3\gamma_n^2=\dfrac{4\pi c^2}{3V}$ であり，$\mathfrak{A}^2_{n,y}$ および $\mathfrak{A}^2_{n,z}$ も同じである．それゆえ

$$w_{k\bar{k}}(\rho)=\underset{\rho\leqq\rho_n<\rho+d\rho}{\text{平均}}\left|\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{m_\nu}(P_\nu^x\mathfrak{A}_{n,x}(Q_\nu^x, Q_\nu^y, Q_\nu^z)+\cdots\cdots)_{k\bar{k}}\right|^2$$

$$\approx\frac{4\pi c^2}{3V}\left(\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}\frac{e_\nu}{m_\nu}P_\nu^x\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\cdots\cdots\right)$$

となる．それだけとりだして考えた系 S のエネルギー H_0 は運動エネルギー＋ポテンシャルエネルギーであり，したがって

$$\mathsf{H}_0=\sum_{\nu=1}^{l}\frac{1}{2m_\nu}((P_\nu^x)^2+(P_\nu^y)^2+(P_\nu^z)^2)+V(Q_1^x, Q_1^y, Q_1^z,\cdots\cdots, Q_l^x, Q_l^y, Q_l^z)$$

という形であるから，

$$\mathsf{H}_0Q_\nu^x-Q_\nu^x\mathsf{H}_0=\frac{h}{2\pi i}\ \frac{1}{m_\nu}P_\nu^x$$

が成り立つ[153]．そして H_0 は対角要素 $W_1, W_2, \cdots\cdots$ をもつ対角行列であるから $[(\mathsf{H}_0)_{kj}=W_k\delta_{kj}]$，これから行列要素に対して

$$(P_\nu^x)_{k\bar{k}}=\frac{2\pi i m_\nu}{h}(\mathsf{H}_0Q_\nu^x-Q_\nu^x\mathsf{H}_0)_{k\bar{k}}=\frac{2\pi i m_\nu}{h}(W_k-W_{\bar{k}})\times(Q_\nu^x)_{k\bar{k}}$$

$$=\pm i\cdot 2\pi m_\nu\bar{\nu}_{k\bar{k}}(Q_\nu^x)_{k\bar{k}}$$

が導かれる．したがって：

---

153) P_ν^x は Q_ν^x をのぞいてすべての Q_μ^x, Q_μ^y, Q_μ^z, P_μ^x, P_μ^y, P_μ^z と交換可能である．そして

$$P_\nu^xQ_\nu^x-Q_\nu^xP_\nu^x=\frac{k}{2\pi i}1$$

である．

したがって

$$\mathsf{H}_0Q_\nu^x-Q_\nu^x\mathsf{H}_0=\frac{1}{2m_\nu}(P_\nu^x)^2Q_\nu^x-Q_\nu^x\frac{1}{2m_\nu}(P_\nu^x)^2=\frac{h}{2\pi i}\ \frac{1}{m_\nu}P_\nu^x$$

である．注 143) をみよ．

$$w_{k\bar{k}}(\rho)=\frac{16\pi^3c^2}{3V}\bar{\nu}_{k\bar{k}}{}^2\left(\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu{}^x\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\cdots\cdots\right).$$

θ_k の公式に代入して

$$\theta_k=\frac{8\pi^3}{3h^2}\left(\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu{}^x\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\cdots\cdots\right)\cdot It$$

がえられる．

この結果は，なお $w_{k\bar{k}}=\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu{}^x\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\cdots\cdots$ とおけば，明らかにつぎのように解釈される：k 番目の状態にある原子 S は以下のような遷移（量子的飛躍）を行う：

1．それはより高い状態 $\bar{k}(W_{\bar{k}}>W_k)$ に移る，しかもそれは毎秒

$$\frac{8\pi^3}{3h^2}w_{k\bar{k}}I\left(\frac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}\right)$$

回——すなわち対応する Bohr の振動数，$\dfrac{W_{\bar{k}}-W_k}{h}$ の輻射場の強度に比例して生ずる．

2．それは，より低い状態 $\bar{k}(W_{\bar{k}}<W_k)$ に移る．しかもそれは毎秒

$$\frac{8\pi^3}{3h^2}w_{k\bar{k}}I\left(\frac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)$$

回——すなわち対応する Bohr の振動数 $\dfrac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}$ の輻射場の強度に比例して生ずる．

3．なおそのうえに，それは低い状態 $\bar{k}(W_{\bar{k}}<W_k)$ に移る，しかもそれは毎秒

$$\frac{64\pi^4}{3hc^3}w_{k\bar{k}}\left(\frac{W_k-W_{\bar{k}}}{h}\right)^3$$

回——すなわち存在する輻射場とはまったく無関係に生ずる．

1．は，輻射場からの吸収の過程に対応する；2．は輻射場によってひきおこされる放出過程に対応する；3．は自発的な放出過程であり，それは原子がその最低の定常状態（最小の W_k!）におちて最後的な静止を見出すときまでつねに生ずるであろう．

この３つの遷移のメカニズム 1～3 は量子力学の発見のまえにすでに Einstein によって熱力学的に見出されていた[154]．ただ“遷移確率”$w_{k\bar{k}}$ の値

154） Physik. Z. Bd. 18 (1917)

が欠けていた．うえの値

$$w_{k\bar{k}}=\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu^{x}\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu^{y}\right)_{k\bar{k}}\right|^2+\left|\left(\sum_{\nu=1}^{l}e_\nu Q_\nu^{z}\right)_{k\bar{k}}\right|^2$$

は，すでに述べたように，Heisenberg が与えた最初の解釈の仮定のなかに含まれていた．われわれはいまそれを（Dirac にしたがって）一般的な理論にもとづいて基礎づけたのである．

IV. 理論の演繹的構成

1. 統計的理論の原理的基礎づけ

第 III 章においてわれわれは，量子力学のすべての命題を統計的公式（そこでは $\boldsymbol{E}_2$. とよばれた）

$$(\bar{\boldsymbol{E}}.)\qquad \mathrm{Erw}(\mathfrak{R},\ \varphi)=(R\varphi,\ \varphi)$$

に帰着させることに成功した（$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R},\ \varphi)$ は状態 φ における量 $\mathfrak{R}$ の期待値，R は $\mathfrak{R}$ の作用素である）．以下ではこの公式自身が二，三のより一般的な定性的仮定を基礎にして，どのように導き出されるかを示し，同時にそれにもとづいて III. で行った量子力学の全構成をもう一度調べてみる．しかし，それを行うまえに，なお 1 つ注意しなければならないことがある．

状態 φ において量 $\mathfrak{R}$ は期待値

$$\rho=(R\varphi,\ \varphi)$$

および，分散 ε^2 として量 $(\mathfrak{R}-\rho)^2$ の期待値，すなわち

$$((R-\rho\cdot 1)^2\varphi,\ \varphi)=\|R\varphi\|^2-(R\varphi,\ \varphi)^2$$

をもち（注 130）をみよ)，後者は一般に >0 である（それが $=0$ なのは $R\varphi=\rho\cdot\varphi$ に対してだけである．III. 3. を参照）——したがって，たびたび確認したように，すでに単一な状態 φ においてさえ統計だけしか成り立たない．しかし統計的性格はいったいどの状態が存在しているのかが知れていないと，例えば多くの状態 $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\cdots$ がそれぞれ確率 $w_1,\ w_2,\ \cdots\cdots(w_1\geqq 0,\ w_2\geqq 0,\ \cdots\cdots;\ w_1+w_2+\cdots\cdots=1)$ で存在するということによって，いっそう強いものになりうるのである．そのとき量 $\mathfrak{R}$ の期待値は，一般的に成り立つ確率計算の規則にしたがって

$$\rho'=\sum_n w_n\cdot(R\varphi_n,\ \varphi_n)$$

となる．

さて一般に

$$(R\varphi,\ \varphi)=\mathrm{Spur}(P_{[\varphi]}\cdot R)$$

である．なぜかというと，規格化された完全直交系 $\psi_1,\ \psi_2,\ \cdots\cdots$ を $\psi_1=\varphi$ であるように選べば（したがって $\psi_2,\ \psi_3,\ \cdots\cdots$ は φ に直交する），

$$P_{[\varphi]}\psi_n\begin{cases}=\varphi, & n=1 \text{ に対して,}\\ =0, & \text{それ以外.}\end{cases}$$

ゆえに

$$\mathrm{Spur}(P_{[\varphi]}\cdot R)=\sum_{m,n}(P_{[\varphi]}\psi_n,\ \psi_m)(R\psi_m,\ \psi_n)$$
$$=\sum_m(\varphi,\ \psi_m)(R\psi_m,\ \varphi)=(R\varphi,\ \varphi).$$

したがって，うえの ρ' は

$$\rho'=\mathrm{Spur}\left(\left\{\sum_n w_n\cdot P_{[\varphi_n]}\right\}\cdot R\right)$$

となる：すべての $P_{[\varphi_n]}$ が定符号であること，および $w_n\geqq 0$ のために，作用素

$$U=\sum_n w_n P_{[\varphi_n]}$$

は定符号であり，そのスプールは，$\mathrm{Spur}\,P_{[\varphi_n]}=1$ のために

$$\sum_n w_n=1$$

に等しい．そしてこの作用素は，いまさき述べた状態の混合の統計的な性質を完全に特徴づける；

$$\rho'=\mathrm{Spur}(UR).$$

もろもろの状態のほかに，このような混合にもわれわれの注意を向けなければならないことがわかったから，一般論の研究へ移る．

量子力学のことはすべて忘れて，ただつぎのことを考える．ある系 $\boldsymbol{S}$ が与えられており[155]，それに対して有効に測定できるすべての量，及びそれらの量

155）ただのある系と，あるきまった状態にある系とのあいだの概念的な違いを強調することは重要である．系とは例えば水素原子，すなわち，よく知られた力をたがいに及ぼしあう1個の電子と1個の陽子である．それは形式的には，状態空間が6次元であって，座標は $q_1,\cdots\cdots,q_6$，運動量は $p_1,\cdots\cdots,p_6$ とよばれ，ハミルトン函数は

$$H(q_1\cdots\cdots q_6 p_1\cdots\cdots p_6)=\frac{p_1^2+p_2^2+p_3^2}{2m_e}+\frac{p_4^2+p_5^2+p_6^2}{2m_p}$$
$$+\frac{e^2}{\sqrt{(q_1-q_4)^2+(q_2-q_5)^2+(q_3-q_6)^2}}$$

である，ということを与えることによって記述される．状態はそれ以上のことを与えてはじめてきまる：古典力学においては，座標および運動量 $q_1,\cdots\cdots,q_6,\ p_1,\cdots\cdots,p_6$ に数値 $q_1^0,\cdots\cdots,q_6^0,\ p_1^0,\cdots\cdots,p_6^0$ をふりあてることによって，また量子力学では，波動函数 $\varphi(q_1\cdots\cdots q_6)$ を与えることによって．これ以上を与える必要はまったくない：系＋状態があれば，理論はあらゆる問に対する答を計算する方法を指示するのである．

のあいだの函数関係が与えられれば，実験者にとってその系が特徴づけられたことになるとしよう．いったい量とは，それをどのように測定するか——そして，測定装置の針の位置からそれの値をどのように読みとり，あるいは計算するか，ということの指示であると理解されるべきものである．$\mathfrak{R}$ がある量で $f(x)$ はなんらかの函数であるとき，量 $f(\mathfrak{R})$ はつぎのように定義される：$f(\mathfrak{R})$ を測定するには，$\mathfrak{R}$ を測定し，そのさい（$\mathfrak{R}$ に対して）a という値をえたとすれば，$f(a)$ が $f(\mathfrak{R})$ の値である．明らかにすべての量 $f(\mathfrak{R})$ は（$\mathfrak{R}$ は固定，f は任意の函数）いちどに，また $\mathfrak{R}$ と一緒に測定される：それらは同時に測定可能な量の第1の例である．一般に2つ（あるいはそれ以上）の量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は，それぞれの値が異った方法で計器の読みから計算されるということを別にして，ともかく同一の系に対してそれらを同時に測定するような装置があるとき同時に測定可能といわれる（古典力学ではいうまでもなくすべての量が同時に測定可能である．量子力学では，III.3.で知ったように，そうはなっていない）．そのような量および2変数の函数 $f(x, y)$ に対しても，$f(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ という量を定義することができる：それは，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ を同時に測定し，そのとき a, b という値をえたならば，$f(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ の値は $f(a, b)$ であるとすることによって測定される．しかし，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ が同時に測定可能でないときに $f(\mathfrak{R}, \mathfrak{S})$ を作ろうとするのはまったく無意味だということが思い浮ぶにちがいない．実際それに属する測定装置を与える方法はまったくないのである．

しかしながら，あるただ1つの対象 S における物理量を調べることだけがわれわれのなしうる唯一のことではない——とくに，多くの量の同時測定の可能性にかんして疑問があるときにはそうでない．そのような場合には，多くの系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$（すなわち，Nが大きいとして，S のN個の標本）からなる大きな統計集団を考察することができる[156]．そのような集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ について測定されるのは，もちろん量 $\mathfrak{R}$ の“値”ではなく，その値の分布である．すなわち，各区間 $a' < a \leqq a''$ に対して（a', a'' は与えられており，$a' \leqq a''$），$S_1, \cdots\cdots, S_N$ のうち $\mathfrak{R}$ の値がその区間内にあるものの数である——この数の

156）コレクチーフとよばれるこのような集団は，一般に確率論を頻度の理論として基礎づけることを可能とするうえで必要である．それは R. von Mises によって導入された．かれはそれの確率論に対する意義を認識して，それに基づく確率論の構成を行ったのである（例えばかれの著書 Wahrscheinlichkeit, Statistik und ihre Wahrheit, Berlin 1928 を参照）．

N分の 1 は確率函数

$$w(a', a'')=w(a'')-w(a')$$

である[157]. そのような集団を考えることの大きな利点はつぎのとうりである：

1. 量 $\mathfrak{R}$ の測定が，測定された系 S をいちじるしく変化させるような場合でさえ（量子力学の場合がまさにそうだった．そしてわれわれは III. 4. で測定による干渉の大きさがその系ないし観測される部分と同じ程度であるために，素過程の物理学においては原理的にそうでなければならないことを知った），集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ における量 $\mathfrak{R}$ の確率分布の統計的調査がこの集団に与える変化は，Nを十分大きくすれば，いくらでも小さくできる．

2. 2つの（あるいはそれ以上の）量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ が個々の系 S については同時に測定可能でない場合でも，同じ 1 つの集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ におけるそれらの確率分布を，N が十分大きければ，同時にいくらでも正確に見出すことができる．

N 個の要素からなる集団では，量 $\mathfrak{R}$ の値の分布の統計的調査を N 個の要素 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ のすべてについてでなく，$M(\leqq N)$ 個の要素からなる部分集団，例えば $[S_1, \cdots\cdots, S_M]$ について行えば十分である．このさい M, N がともに大きくなければならないが，M は N に比べてずっと小さくてよい[158]．そうすると，測定のさいの変化によっても，集団の M/N の部分だけしか影響をうけない．したがって，M/N を十分小さく選べば——それは M が大で

---

157) $w(a')$ は $a \leqq a'$ の確率である．すなわちそれは区間 $-\infty, a'$ に属する．$w(a)$ が $\mathfrak{R}$ に依存することをはっきりさせるために $w_{\mathfrak{R}}(a)$ という記号を使うことにすれば，これはつぎの性質をもっていることがわかる：

$$a \to -\infty \text{ に対して } w_{\mathfrak{R}}(a) \to 0,$$
$$a \to +\infty \text{ に対して } w_{\mathfrak{R}}(a) \to 1;$$
$$a \geqq a_0,\ a \to a_0 \text{ に対して } w_{\mathfrak{R}}(a) \to w_{\mathfrak{R}}(a_0);$$
$$a' \leqq a'' \text{ に対して } w_{\mathfrak{R}}(a') \leqq w_{\mathfrak{R}}(a'').$$

〔量子力学においては，$E(\lambda)$ が R に属する単位の分解であれば $w_{\mathfrak{R}}(a)=\|E(a)\varphi\|^2=(E(a)\varphi, \varphi)$〕

もし $w_{\mathfrak{R}}(a)$ が微分可能ならば，それのかわりに，よく知られた“確率密度” $\frac{d}{da}w_{\mathfrak{R}}(a)$ を導入することができる；これが $a=a_0$ で不連続であれば（いうまでもなく左から），$a=a_0$ という点は“離散確率” $w_{\mathfrak{R}}(a_0)-w_{\mathfrak{R}}(a_0-0)$ をもつ．しかし，一般に有効な大概念（Oberbegriff：三段論法において結論の賓辞となる概念——訳者）は $w_{\mathfrak{R}}(a)$ である．前掲注 156）を参照．

158) これはいわゆる大数の法則，すなわち Bernoulli の定理からの結果である．

あっても N を十分に大きくすれば可能である——，1で主張されたように，影響をうけるものはいくらでも小さくなる．2つの（あるいはそれ以上の）量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ を同時に測定するためには，2つの部分集団，例えば $[S_1, \cdots\cdots, S_M]$ および $[S_{M+1}, \cdots\cdots, S_{2M}]$ $(2M \leqq N)$ をとって，第1を $\mathfrak{R}$ の統計をとるために，第2を $\mathfrak{S}$ の統計をとるために利用すればよい．そうすると 2. で主張されたように，2つの測定は，同一の集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ に対してなされたにもかかわらずたがいに攪乱をおよぼさず，また，$2M/N$ が十分小さければ——M が十分大きくても，N を十分大きくとれば可能である——，この集団の任意に小さな部分にしか変化をひきおこさない．

統計集団，したがって確率論的方法の導入が提案されるのは，個々の系が観測によって影響をこうむる可能性，および，ときとしていくつかの量が同時に測定できないという可能性のせいであることがわかる．これらの事情は素過程においてつねに現れると推量されるし[159]，またもろもろの状況を厳密に調べたいまでは，そのような事情の存在は疑う余地がないから（III. 4. をみよ），一般的な理論はこの事情を考慮にいれたものでなければならない．統計集団はこれらの困難を除き，またそのことによって，ふたたび客観的な記述を可能にするのである（客観的な記述とは，偶然や，あたえられた状態において，同時に測定可能でない2つの量のうちのどちらを測定するかというようなことにはかかわりをもたないものである）．

そのような集団において，物理量 $\mathfrak{R}$ が鋭い値をもたず，すなわち，その値の分布がただ1つの値 a_0 からなるのでなく[160]，多くの値あるいは値の区間が可能であって，正の分散が存在する[160]ということは驚くにあたらない．その

159）例えば，電場の定義にとって根本的な困難として，その定義に使うべき電気的"試験体"は電子よりも小さくすることができないということがある．

160）鋭い値 a_0 はつぎのような確率函数 $w_{\mathfrak{R}}(a)$ に対応している：

$$w_{\mathfrak{R}}(a)\begin{cases}=1, & a \geqq a_0 \text{ に対して,}\\ =0, & a < a_0 \text{ に対して.}\end{cases}$$

この場合には，そしてこの場合にだけ分散 ε^2 がゼロである．そのほかの場合，平均値 ρ および分散 ε^2 は（スチェルチェス積分!）

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} a\,dw_{\mathfrak{R}}(a),$$

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (a-\rho)^2 dw_{\mathfrak{R}}(a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 dw_{\mathfrak{R}}(a) - 2\rho\int_{-\infty}^{+\infty} a\,dw_{\mathfrak{R}}(a) + \rho^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 dw_{\mathfrak{R}}(a) - \rho^2$$

ようなふるまいの根拠としてとにかく2つのことが考えられる；

I. われわれの集団に属する個々の系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ は種々の状態にあることができ，集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ はその相対的な頻度によって定義される．この場合に物理量に対して鋭い値がえられないのは，われわれの無知のためである；実際，どの状態に対して測定をしたかを知らないのであり，したがってどの値がえられるかをいうことはできない．

II. 個々の系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ はすべて同じ状態にあるが，しかし自然法則が因果的でない．そのときは，われわれの無知が分散の原因なのではなく，“充足理由の法則”を超越する自然そのものが原因である．

I. の場合は一般に知られているが，重要でありかつ新しいのは II. の場合である．そのような場合が存在することについて人々がはじめ懐疑的になるのは確かであろうが，しかし，この場合が現れるか現れないかの判断を可能にする客観的な基準をわれわれは見出すであろう．はじめ，そのような場合が考えられること，および，それが意味をもつことに対して，きびしい反論がなされうるようにみえる．しかしわれわれは，そのような反論は成り立たず，いくつかの困難（たとえば量子力学における）からの唯一のぬけ道は II. であると信ずるのである．

II. に対してこう反論できよう：自然はけっして“充足理由の法則”，すなわち，因果律をやぶることはできない．なぜなら，それは等しいということの定義の問題だから．つまり，2つの等しい対象 S_1, S_2——すなわち，系 S の同じ状態にある2つの標本——は考えうるすべての操作に対して等しくふるまうという定理は，何ごともいわないがゆえに正しい．なぜならもし S_1, S_2 が同一の操作にさいして異ったふるまいを示す（例えば，量 $\mathfrak{R}$ を測定すれば異った値を与える）ならば，それらを等しいとはいわないだろうから；したがって，量 $\mathfrak{R}$ にかんして分散している集団 $[S_1, \cdots\cdots S_N]$ において，個々の系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ は per definitionem（定義により）すべてが同じ状態にはありえない．（量子力学に適用すればこうである：すべて波動函数 φ をもつ同じ状態にある多くの系について，同じ量 $\mathfrak{R}$ を測定したときさまざまな値がえられる——φ が $\mathfrak{R}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} a^2 dw_{\mathfrak{R}}(a)-\left(\int_{-\infty}^{+\infty} a dw_{\mathfrak{R}}(a)\right)^2$$

と計算される（II. 4 注 130）を参照）．

の作用素Rの固有函数でないとき[161]——から，これらの系はたがいに等しくない，すなわち，波動函数による記述は完全でない．これからすると，なおほかの決定因子，III. 2. で述べた“かくれたパラメーター”が存在するはずである．そうは簡単にいかないことがまもなくわかるであろう）．したがって，大きな統計集団においてなおいくつかの量が分散しているかぎり，その集団がいくつかの異った構成部分に（それらの要素の状態が異なるに応じて）分割される可能性がなければならない．実際そのような分割の簡単な方法が存在するようにみえるだけに，これは納得できることである．すなわち，そのなかで $\mathfrak{R}$ のとる種々の値にしたがって分割することができる．このような小分けあるいは分割を，存在するすべての量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}, \cdots\cdots$ について実行したのちにはじめて，真に一様な集団がえられるであろう．そうすると最後には，小分けされたどの集団においても，これらの量はもはや分散していない．

まず第1に最後の文章に含まれている陳述は，測定が測定される系を変化させるということに注意していないから正しくない．すべての対象 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ について $\mathfrak{R}$（簡単のためにただ2つの値 a_1, a_2 だけをとりうるとする）を測定して，$S_1', \cdots\cdots, S_{N_1}'$ では a_1 を，$S_1'', \cdots\cdots, S_{N-N_1}''$ では a_2 をえたとすると，$[S_1', \cdots\cdots, S_{N_1}']$ にも $[S_1'', \cdots\cdots, S_{N-N_1}'']$ にも分散は存在しない（その値はそれぞれすべて a_1，およびすべて a_2 である）．しかしながら，個々の系は $\mathfrak{R}$ の測定によって変化を受けているから，これは単なる $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ の2つの部分への分割ではない．確かに 1. によれば，$[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ をごくわずかしか変化させないで，$\mathfrak{R}$ の値の分布をきめる方法が見出される $\left(M\right.$ は大きいが $\frac{M}{N}$ は小さいとして，$S_1, \cdots\cdots, S_M$ を測定する$\left.\right)$．けれども，この操作では，$S_1, \cdots\cdots, S_N$ のうち大部分（つまり $S_{M+1}, \cdots\cdots, S_N$）については，それらの各々において $\mathfrak{R}$ がどの値をもつかがまったく定まらないから，分割したことにならない．こうしていまや，完全に一様な集団をつくりだすためのうえに与えた方法はだめであることが認められる．なぜならば，いま第2の量 $\mathfrak{S}$（これもまた2つの値 b_1, b_2 だけをとるとする）を$[S_1', \cdots\cdots, S_{N_1}']$ と $[S_1'', \cdots\cdots, S_{N-N_1}'']$ とで測定するとする．b_1 は $S_1''', \cdots\cdots, S_{N_{11}}'''$ および $S_1^{V}, \cdots\cdots, S_{N_{12}}^{V}$ で見出され，b_2 は $S_1^{IV}, \cdots\cdots, S_{N_1-N_{12}}^{IV}$ と $S_1^{VI}, \cdots\cdots, S_{N-N_1-N_{12}}^{VI}$ とで見

161）多くの系に対する独立な測定を問題にしているのである．同一の系に継続して測定を行えば，つねに同じ値がえられるであろう（III. 3 をみよ）．

出される．すると，$[S_1''', \cdots\cdots, S_{N_{11}}''']$，$[S_1^{IV}, \cdots\cdots, S_{N_1-N_{11}}^{IV}]$，$[S_1^{V}, \cdots\cdots, S_{N_{12}}^{V}]$，$[S_1^{VI}, \cdots\cdots, S_{N-N_1-N_{12}}^{VI}]$ のなかでは $\mathfrak{S}$ は分散していない（その値は，それぞれ，つねに b_1，つねに b_2，つねに b_1，つねに b_2 である）．しかし，はじめの2つの集団は $\mathfrak{R}$ の分散のない $[S_1', \cdots\cdots, S_{N_1}']$ の部分であり，あとの2つは同じく $[S_1'', \cdots\cdots, S_{N-N_1}'']$ の部分であるといっても，$\mathfrak{S}$ の測定が（これらの集団をつくっている）個々の系を変化させてしまうから，それら4つの集団のいずれにおいても $\mathfrak{R}$ は分散していることがありうる．すなわち，各々の一歩がまえの一歩の結果をこわし[162]，継続した測定をさらにくり返しても，この混乱に因果的な秩序はもたらされないから，われわれは一歩も前進できない：それは，原子の世界は，すべての測定が測られる対象と同じ大きさの程度の干渉をもたらし，したがって測定が根本的な影響をおよぼす物理的世界の境界にあるからである．すなわち，本質的には不確定性関係のためなのである．

したがって場合によっては，分散をもっている集団を（その要素を変化させることなく）さらに分割すること，あるいは，もはや全然分散のない一様な集団——それはふつう，因果的に決定された，たがいに等しい個々の対象からなると考えられている——にまで達することをつねに可能にするような方法はない．それにもかかわらず，どのような分散のある集団をも，その要素を変化させずに，すなわち，分割された集団をあわせればふたたび最初の集団がえられるようにして，もとのものからも，またおたがいにも異った2つのあるいはそれ以上の部分に分割することができる，という仮構を保持しようと試みることもできよう．だが因果律を等しさの定義として基礎づけようとする試みから1つの事実問題に導かれる．それに答えることは可能であり，かつ答えなければならない．そしておそらく否定的な答がえられるであろう．その問題はこうである：分散のある量 $\mathfrak{R}$ をもつ任意の集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ を，この集団とも異なり，またたがいにも異なる2つの（あるいはそれ以上の）集団をあわせたものとして表わすことは現実に可能なことであろうか？（2よりも大きい $n=3, 4, \cdots\cdots$ の場合には，第一のものと残りの $n-1$ 個の混合とを考えることによ

162）例えば，$\mathfrak{R}$，$\mathfrak{S}$ として（不確定性関係のために）同時に測定可能でない量 q（デカルト座標）および p（運動量）をとったときにどうなるかを考えてみよ．ある集団において q がほとんど分散していないとき，精度（すなわち分散）ε での p の測定は q の分散を少くとも $h/4\pi\varepsilon$ にまで高める（Ⅲ．4 をみよ）——すなわち元も子もなくなる．

って2個の場合に帰着させることができる.)

$[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ が $[S_1', \cdots\cdots, S_P']$ および $[S_1'', \cdots\cdots, S_Q'']$ の混合であれば，あらゆる量 $\mathfrak{R}$ に対する確率函数 $w_{\mathfrak{R}}(a)$ は（注 157）をみよ），あとの2つの集団における確率函数 $w_{\mathfrak{R}}'(a)$, $w_{\mathfrak{R}}''(a)$ のたすけをかりて

$$(M_1.)\qquad w_{\mathfrak{R}}(a)=\alpha w_{\mathfrak{R}}'(a)+\beta w_{\mathfrak{R}}''(a),$$
$$\alpha>0,\ \beta>0,\qquad \alpha+\beta=1$$

と表わされる．ここで

$$\alpha=\frac{P}{N},\qquad \beta=\frac{Q}{N}\quad (N=P+Q)$$

は $\mathfrak{R}$ に無関係である．したがって，基本的にはこれは数学の問題である：確率函数 $w_{\mathfrak{R}}(a)$ をもつ集団において分散のある量 $\mathfrak{R}$（$\mathfrak{R}$ に分散があることが $w_{\mathfrak{R}}(a)$ にどう反映されるかということは，注 160）に述べてある）が存在するとき，すべての $\mathfrak{R}$ に対して $M_1.$ を成り立たせるような確率函数 $w_{\mathfrak{R}}'(a)$ および $w_{\mathfrak{R}}''(a)$ をもつ2つの他の集団が存在するであろうか？集団を量 $\mathfrak{R}$ の確率函数 $w_{\mathfrak{R}}(a)$ でなく，$\mathfrak{R}$ の期待値

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\int_{-\infty}^{+\infty} a\,dw_{\mathfrak{R}}(a)$$

で特徴づけることにすれば，この問題はまた別なように定式化できる．そのときわれわれの問題はこうなる：ある集団のなかですべての $\mathfrak{R}$ に対して

$$\mathrm{Erw}([\mathfrak{R}-\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})]^2)=\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}^2)-[\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})]^2$$

がゼロに等しければ（注 160）をみよ），すなわち，

$$(Str_1.)\qquad \mathrm{Erw}(\mathfrak{R}^2)=[\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})]^2$$

であれば，その集団には分散がない．そうでないときに，$\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})$, $\mathrm{Erw}''(\mathfrak{R})$ をもつ2つの他の集団を見出して（$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\fallingdotseq\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})\fallingdotseq\mathrm{Erw}''(\mathfrak{R})$），つねに

$$(M_2.)\qquad \mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\alpha\,\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})+\beta\,\mathrm{Erw}''(\mathfrak{R}),$$
$$\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1$$

が成り立つように（α, β は $\mathfrak{R}$ に無関係）することがいつも可能であろうか？［1つの与えられた量 $\mathfrak{R}$ に対して，数 $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ が函数 $w_{\mathfrak{R}}(a)$ の代用物になるのではなく，すべての $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ の知識がすべての $w_{\mathfrak{R}}(a)$ の知識に同等なのであることに注意せよ．なぜなら，$f_a(x)$ が

$$f_a(x)\begin{cases}=1, & x\leqq a\ \text{に対して}\\ =0, & x>0\ \text{に対して}\end{cases}$$

によって定義されておれば，

$$w_{\mathfrak{R}}(a)=\mathrm{Erw}(f_a(\mathfrak{R}))$$

だからである.]

この問に数学的に答えるためには，集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ でなく，これに対応する $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ に注目する方が便利である．すべての集団に対して，S におけるすべての物理量 $\mathfrak{R}$ について定義され，値として実数をとり，かつ逆に集団のすべての統計的性質を完全に特徴づけるような函数が属している（さきほど $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ と $w_{\mathfrak{R}}(a)$ との関係について述べたことを参照)．もちろんそのうえに $\mathfrak{R}$ の函数が適当な集団の $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ であるためには，それがどんな性質をもつべきかを知らなければならない．しかし，それを知ってしまえば直ちにつぎのように定義できる：

α) $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ を与える $\mathfrak{R}$ の函数は，条件 ***Str*₁.** をみたすとき分散がないといわれる．

β) $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ を与える $\mathfrak{R}$ の函数は，それに対して，***M*₂.** が

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\equiv\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})\equiv\mathrm{Erw}''(\mathfrak{R})$$

を意味するとき，一様である，または純粋であるといわれる．

分散のない函数 $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ が純粋であることは，その内容からして明らかであるし，またすぐに証明することもできる．ところで，われわれの問題はこうなる：すべての純粋な $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ 函数は分散なしであろうか?

すべての $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ 函数がつぎの性質をもたなければならないことは明らかである：

***A*.** 量 $\mathfrak{R}$ が恒等的に 1 に等しいならば（すなわち，$\mathfrak{R}$ はつねに 1 という値をもつのだから，$\mathfrak{R}$ についての測定の指示は，何も測定する必要はないということである)．$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=1$ である．

***B*.** すべての $\mathfrak{R}$，およびすべての数 a に対して

$$\mathrm{Erw}(a\mathfrak{R})=a\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\text{[163]}.$$

***C*.** 量 $\mathfrak{R}$ が，例えば他の量 $\mathfrak{S}$ の 2 乗に等しいときなどのように[163]，その本性からしてけっして負にならないならば，

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\geqq 0.$$

***D*.** 量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots\cdots$ が同時に測定可能ならば，

---

163) $a\mathfrak{R}, \mathfrak{S}^2, \mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ の意味はこうである：まえに与えた定義の意味で，函数

$$f(x)=ax,\quad f(x)=x^2,\quad f(x, y, \cdots\cdots)=x+y+\cdots\cdots$$

のなかにそれぞれ量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ および $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}\cdots\cdots$ を代入する．

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots)=\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})+\mathrm{Erw}(\mathfrak{S})+\cdots\cdots$$ [163]

である（同時に測定可能でない $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… に対して $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ を定義することはできない．まえのところをみよ）．

これらすべては，考えているそれぞれの量の定義（すなわち，それらの測定法），および，十分大きな統計集団に対してえられたすべての測定結果の算術平均としての期待値の定義からただちにでてくる．**D.** については，その正しさの根拠は，和の期待値は，その各項のあいだに確率の依存関係があるかないかにかかわらず（例えば積の場合などとは反対）つねに各項の期待値の和に等しい，という確率論の定理であるということを注意しておく．同時に測定可能でない $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… に対しては $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ が意味をもたないのだから，**D.** を上のような量についてのみ定式化したことは不自然でない．

しかし量子力学には，いまの議論を超えたもう1つの演算操作が含まれている：すなわち，2つの任意な，必ずしも同時に測定可能ではない量の加え算である．これは，2つのエルミート作用素 R, S があれば，これらが交換可能でないときでも，和 $R+S$ はやはりエルミート作用素であるという事実にもとづいている．他方，例えば積 $R\cdot S$ などは交換可能のときにだけエルミートになるにすぎない（II.5. をみよ）．すべての状態において期待値は加えることができる（III.1 の **E_2.** をみよ）：

$$(R\varphi,\ \varphi)+(S\varphi,\ \varphi)=((R+S)\varphi,\ \varphi).$$

もっと多くの和についても同じである．この事実をわれわれは一般的な（さしあたり，けっして量子力学に特殊化されない）つぎの命題に含める．すなわち，

E. $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… を任意の量とすれば，

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots)=\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})+\mathrm{Erw}(\mathfrak{S})+\cdots\cdots$$

が成り立つようなもう1つの量 $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ が存在する（この量は $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ 函数の選び方にはよらない）．

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… が同時に測定可能ならば，この $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ は **D.** によってふつうの和である．しかし一般には，それは **E.** によって間接的に特徴づけられるだけで，$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… に対する測定法を $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ の測定法に関係づけることはほとんどできない[164]．

以上述べたことになおつけ加えるべきことがある：われわれは期待値を表わ

164）そこで例えば，ポテンシャルの場 $V(x,\ y,\ z)$ のなかを動く電子に対する Heisenberg 理論のエネルギー作用素

す Erw($\mathfrak{R}$) 函数だけでなく，相対的な期待値に対応する函数をも許容しようと思う．すなわち，規格化の条件 ***A.*** をおとすのである．Erw(1) が（これは ***C.*** により $\geqq 0$）有限で $\neq 0$ ならば，$\dfrac{\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})}{\mathrm{Erw}(1)}$ に対してはすべてがもとのままだから，そうしても本質的な影響はない．しかし Erw(1)$=\infty$ は根本的に異なった可能性をひらく．この可能性のためにこそ，われわれはうえの拡張をするのであるが，それは簡単な例によってもっともよく説明される．すなわち，真正の確率の代りに相対確率，とりわけ，無限大の相対確率 [Erw(1) は全確率に対応している] を使う方がよい場合が存在するのである；そのような例の1つは，考察している系が1次元空間のうえを動く粒子であって，その統計的分布が，無限直線のうえのいたるところで一様であるような場合である．この場合，この直線上の各有限区間の確率はゼロであるが，すべての点が等しい確率をもつことはこれによっては表わされず，2つの有限区間の確率の比がそれらの長さの商に等しいことによって表わされるのである．$\dfrac{0}{0}$ は意味をもたないから，このことを把握するにはそれらの長さをそれぞれの相対確率とするほかはない――そうすれば全相対確率はむろん ∞ になる．

これまでに述べたことを考慮すると，われわれの条件の最後的な形として以下のものをえる（***A'.*** は ***C.*** に対応し，***B'.*** は ***B.***, ***D.***, ***E.*** に対応する）：

A'. 量 $\mathfrak{R}$ が，例えばそれが他の量 $\mathfrak{S}$ の2乗である場合のように，その本性からしてけっして負にならないならば，

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\geqq 0$$

である．

B'. $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots\cdots$ を任意の量，$a, b, \cdots\cdots$ を実数とすれば，

$$\mathrm{H}_0=\frac{(P^x)^2+(P^y)^2+(P^z)^2}{2m}+V(Q^x, Q^y, Q^z)$$

は（例えば III.6 をみよ），2つの交換可能でない作用素

$$R=\frac{(P^x)^2+(P^y)^2+(P^z)^2}{2m},\quad S=V(Q^x, Q^y, Q^z)$$

の和である．R に属する量 $\mathfrak{R}$ の測定は運動量の測定であり，S に属する量 $\mathfrak{S}$ の測定は座標の測定であるけれども，$\mathrm{H}_0=R+S$ に属する量 $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ はまったく違った測定である．例えばこの（束ばくされた）電子の発するスペクトル線の振動数の測定である．それは，Bohr の振動数関係によって，これがエネルギー準位，すなわち $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ の値をきめるからである．しかし，あらゆる状況のもとで

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}+\mathfrak{S})=\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})+\mathrm{Erw}(\mathfrak{S})$$

である．

$$\mathrm{Erw}(a\mathfrak{R}+b\mathfrak{S}+\cdots\cdots)=a\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})+b\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{S})+\cdots\cdots$$

である．

なお，つぎのことを強調する：

1. 相対的な期待値を考えているのだから，函数 $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ と $c\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ ($c>0$ は定数！) とは本質的には異らないとみなされる．

2. $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\equiv 0$ (すべての $\mathfrak{R}$ に対して) はなんの知識も与えないから，これは除くべきである．

3. $\mathrm{Erw}(1)=1$ のとき絶対的な，すなわち正しく規格化された期待値となる．$\mathrm{Erw}(1)$ は ***A'*** によりつねに $\geqq 0$ であるから，それが有限かつ $\neq 0$ であるかぎり，$c=\dfrac{1}{\mathrm{Erw}(1)}$ とおけば ***1.*** によって正しい規格化へもどる．$\mathrm{Erw}(1)=0$ に対しては，あとで示すように ***2.*** が成り立つから，この場合は排除される．$\mathrm{Erw}(1)=\infty$ に対しては，本質的に規格化されない（すなわち相対的な）統計が生ずる．

われわれの定義 α), β) へもどることがまだ残されている．$\boldsymbol{M_2}$. は ***1.*** を考慮するとつぎの簡単な条件によっておきかえられる：

$\boldsymbol{M_3}$.
$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\equiv\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})+\mathrm{Erw}''(\mathfrak{R}).$$

また $\boldsymbol{Str_1}$. については，そこの計算では $\mathrm{Erw}(1)=1$ が前提されていたことに注意しなければならない．$\mathrm{Erw}(1)=\infty$ に対しては分散がないということを定義できない．というのは，それは $\mathrm{Erw}((\mathfrak{R}-\rho)^2)=0$ を意味するが，この式で ρ は $\mathfrak{R}$ の絶対的な期待値，すなわち $\dfrac{\mathrm{Frw}(\mathfrak{R})}{\mathrm{Erw}(1)}$ であって，ここでは $\dfrac{\infty}{\infty}$ となり意味をもたないからである[165]．したがって，α), β), はつぎのようになる：

α') $\mathrm{Erw}(1)\neq 0$ かつ有限で，したがって ***1.*** によって $\mathrm{Erw}(1)=1$ と仮定できるとき，$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ を与える $\mathfrak{R}$ の函数が分散がないとは，$\boldsymbol{Str_1}$. によって特徴づけられる．

β') $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ を与える $\mathfrak{R}$ の函数は，それに対して $\boldsymbol{M_3}$. から

$$\mathrm{Erw}'(\mathfrak{R})=c'\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}),\quad \mathrm{Erw}''(\mathfrak{R})=c''\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$$

(c', c'' は定数でいうまでもなく $c'+c''=1$，そして ***A'***. および ***1.***, ***2.*** により $c'>0$, $c''>0$) が導かれるとき，一様，あるいは，純粋であるといわれる．

---

165) しかし，分散のない集団に対しては．真正の期待値を導入しないなんの理由もない．

A'., **B'.** および α'), β') に基づいていまや，S における物理量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, ……，およびそれらのあいだに成り立つ函数関係を知りさえすれば，因果性の問題に異論の余地のない結論をくだすことができる．これはつぎの節で，量子力学の諸関係についておこなわれる．

この節の結論として，なお２つの注意をつけ加えなければならない．

第１は Erw(1)=0 という場合に関するものである．このとき，**B'.** から

$$\mathrm{Erw}(c)=0.$$

したがって，量 $\mathfrak{R}$ がつねに $\geqq c'$, $\leqq c''$ ならば，**A'.** によって

$$\mathrm{Erw}(c''-\mathfrak{R})\geqq 0,\quad \mathrm{Erw}(\mathfrak{R}-c')\geqq 0.$$

ゆえに **B'.** により

$$\mathrm{Erw}(c')\leqq \mathrm{Erw}(\mathfrak{R})\leqq \mathrm{Erw}(c'').$$

すなわち

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=0$$

である．いま $\mathfrak{R}$ は任意，$f_1(x)$, $f_2(x)$, …… は

$$f_1(x)+f_2(x)+\cdots\cdots=x$$

となるような有界な函数列とする．(例えば，$n=2, 3,$ …… に対して

$$f_1(x)=\frac{\sin x}{x},\quad f_n(x)=\frac{\sin nx}{nx}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)x}.\Bigg)$$

そうすると，$n=1, 2,$ …… に対して $\mathrm{Erw}(f_n(\mathfrak{R}))=0$ だから，**B'.** によって $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ もそうである．したがって，まえに述べた主張にしたがって，**2.** によって Erw(1)=0 は排除される．

第２に，分散のない場合，$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ は単に $\mathfrak{R}$ の値であり，$\mathrm{Erw}(f(\mathfrak{R}))$ は $f(\mathfrak{R})$ の値であるから，すべての函数 $f(x)$ に対して

$$(\boldsymbol{Str_2.})\qquad \mathrm{Erw}(f(\mathfrak{R}))=f(\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}))$$

が成り立たなければならない．にもかかわらず，$\boldsymbol{Str_1.}$ によって

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}^2)=[\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})]^2$$

がこの場合を特徴づけるというのはちょっと意外である．$\boldsymbol{Str_1.}$ は $f(x)=x^2$ という $\boldsymbol{Str_2.}$ の特別の場合であるが，どうしてそれが十分なのであろうか？ 答えはこうである：$\boldsymbol{Str_1.}$ は $f(x)=x^2$ に対して成り立てば，自動的にすべての $f(x)$ に対して成り立つ．x^2 を他の任意の連続な凸函数（すなわち，すべての $x\neq y$ に対して

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

が成り立つような函数）でおきかえることさえできる．証明には立ちいらないことにする．

2. 統計的公式の証明

量子力学的系の物理量に対して超極大なエルミート作用素を一意的に対応させられることは，われわれの知っているとうりであるが（例えば III. 5. の議論を参照），それに加えて，これらの対応は1対1である——すなわち，すべての超極大なエルミート作用素は現実に物理量に対応している，と仮定するのがつごうがよい（III. 3. ではおりおりこの仮定を使った）．そうするとつぎの規則が成り立つ（III. 5. の ***F.*** および IV. 1. のおわりに述べたことを参照）．

I. 量 $\mathfrak{R}$ が作用素Rをもてば，量 $f(\mathfrak{R})$ は作用素 $f(R)$ をもつ．

II. 量 $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots\cdots$ が作用素 $R, S, \cdots\cdots$ をもてば，量 $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}+\cdots\cdots$ は作用素 $R+S+\cdots\cdots$ をもつ（$\mathfrak{R}, \mathfrak{S}, \cdots\cdots$ の同時測定可能性は前提しない．このことについてさきに述べたところをみよ）．

A′., ***B′.***, α'), β') および ***I.***, ***II.*** がわれわれの分析の出発点である．

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を規格化された完全直交系として，各作用素Rのかわりに行列

$$a_{\mu\nu}=(R\varphi_\mu, \varphi_\nu)$$

を考察する．さらに，それぞれ

$$e_{\mu\nu}{}^{(n)}=\begin{cases}1, & \mu=\nu=n \text{ に対して,}\\ 0, & \text{それ以外,}\end{cases}$$

$$f_{\mu\nu}{}^{(mn)}=\begin{cases}1, & \mu=m,\ \nu=n \text{ に対して,}\\ 1, & \mu=n,\ \nu=m \text{ に対して,}\\ 0, & \text{それ以外,}\end{cases}$$

$$g_{\mu\nu}{}^{(mn)}=\begin{cases}i, & \mu=m,\ \nu=n \text{ に対して,}\\ -i, & \mu=n,\ \nu=m \text{ に対して,}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

という行列をもつエルミート作用素をつくる．ちなみに，これらの作用素は，$P_{[\varphi_n]}$, $P_{\left[\frac{\varphi_m+\varphi_n}{\sqrt{2}}\right]}-P_{\left[\frac{\varphi_m-\varphi_n}{\sqrt{2}}\right]}$, $P_{\left[\frac{\varphi_m+i\varphi_n}{\sqrt{2}}\right]}-P_{\left[\frac{\varphi_m-i\varphi_n}{\sqrt{2}}\right]}$ であるが，対応する量を $\mathfrak{U}^{(n)}$, $\mathfrak{V}^{(mn)}$, $\mathfrak{W}^{(mn)}$ とする．明らかに（$a_{nm}=\bar{a}_{mn}$ のために）

$$a_{\mu\nu}=\sum_n a_{nn}e_{\mu\nu}{}^{(n)}+\sum_{m<n}\mathrm{Re}\,a_{mn}f_{\mu\nu}{}^{(mn)}+\sum_{m<n}\mathrm{Im}\,a_{mn}g_{\mu\nu}{}^{(mn)}$$

であるから,

$$\mathfrak{R}=\sum_n a_{nn}\mathfrak{U}^{(n)}+\sum_{m<n}\mathrm{Re}\,a_{mn}\mathfrak{V}^{(mn)}+\sum_{m<n}\mathrm{Im}\,a_{mn}\mathfrak{W}^{(mn)}.$$

また $\boldsymbol{II}$. および $\boldsymbol{B'}$. のために,

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\sum_n a_{nn}\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{U}^{(n)})+\sum_{m<n}\mathrm{Re}\,a_{mn}\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{V}^{(mn)})$$
$$+\sum_{m<n}\mathrm{Im}\,a_{mn}\,\mathrm{Erw}(\mathfrak{W}^{(mn)}).$$

したがって,

$$u_{nn}=\mathrm{Erw}(\mathfrak{U}^{(n)}),$$
$$\left.\begin{aligned}u_{mn}&=\frac{1}{2}\mathrm{Erw}(\mathfrak{V}^{(mn)})+\frac{i}{2}\mathrm{Erw}(\mathfrak{W}^{(mn)})\\u_{nm}&=\frac{1}{2}\mathrm{Erw}(\mathfrak{V}^{(mn)})-\frac{i}{2}\mathrm{Erw}(\mathfrak{W}^{(mn)})\end{aligned}\right\}(m<n)$$

とおけば

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\sum_{mn}u_{nm}a_{mn}$$

である. $u_{mn}=\bar{u}_{nm}$ であるから,

$$(U\varphi_m,\ \varphi_n)=u_{mn}$$

によってエルミート作用素 U を定義することができ[166], そうすると右辺は

---

166) つまり,

$$U\varphi_m=\sum_n u_{mn}\varphi_n$$

とする. もちろんそのためには $\sum_n|u_{mn}|^2$ の有限性が必要である. これは例えばつぎのように根拠づけられる: $\sum_n|x_n|^2=1$ ならば, $\varphi=\sum_n x_n\varphi_n$ に対して $R=P_{[\varphi]}$ は行列 $\bar{x}_\mu x_\nu$ をもち, したがって, R に対応する $\mathfrak{R}$ の期待値は

$$\sum_{mn}u_{nm}\bar{x}_m x_n$$

である.

$$P_{[\varphi]}=P^2{}_{[\varphi]},\quad 1-P_{[\varphi]}=(1-P_{[\varphi]})^2$$

のために, この期待値は $\geqq 0$ かつ $\leqq \mathrm{Erw}(1)$ である. したがって, 少くとも規格化された $\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})$ については $\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ である.

$$x_{N+1}=x_{N+2}=\cdots\cdots=0$$

とすれば, その意味はこうである: N 次元のエルミート形式 $\sum_{mn=1}^{N}u_{nm}\bar{x}_m x_n$ の値は, $\sum_{n=1}^{N}|x_n|^2=1$ のとき, $\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ である. すなわち, 行列

Spur(UR) となる (II. 11. をみよ). したがって最後の形は

(**Sp.**) $$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\mathrm{Spur}(UR)$$

となる. U は Rには依存しないエルミート作用素であり[167], したがって集団それ自体によって定まる.

II. を考慮すれば, U をどう選んでも ***Sp.*** は ***B′*** をみたすから, あとはただ, ***A′*** が U にとってどんな制限を意味するかをしらべればよい.

$\|\varphi\|=1$ 以外にはφは任意とすれば, $P_{[\varphi]}$ に属する量 $\mathfrak{R}$ に対して, $P^2_{[\varphi]}=P_{[\varphi]}$ および ***I.*** によって

$$\mathfrak{R}^2=\mathfrak{R}$$

が成り立つから, ***A′.*** によって

$$u_{\mu\nu},\quad \mu,\nu=1,\cdots\cdots,N$$

の固有値は $\geqq 0$ かつ $\leqq 1$ である. ゆえにつねにベクトル $y_m=\sum_{n=1}^{N}u_{mn}x_n$ の長さ $\leqq$ ベクトル x_m の長さ, である.

$$x_m=\begin{cases}1, & m=\overline{m} \text{ のとき}\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

に対して $y_m=u_{m\overline{m}}$ であるから

$$\sum_{m=1}^{N}|x_m|^2\geqq\sum_{m=1}^{N}|y_m|^2,\quad 1\geqq\sum_{m=1}^{N}|u_{m\overline{m}}|^2.$$

これはすべての N に対して成り立つから,

$$\sum_{n}|u_{\overline{m}n}|^2\leqq 1$$

である.

167) すべての考察は厳密にいえば, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ がすべて R の定義域に属しているときにだけ有効である. さて, 各 R に対してそのような規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を見出すことができるが (II. 11. をみよ), しかし, R がいたるところでは意味をもたなければ, この直交系はRに依存する. したがって, 規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の各々に対するUは, もともと, つぎのようにこの直交系に依存している: すなわち

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\mathrm{Spur}(UR)$$

が, その定義域に $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が属するような R に対してだけ成り立てばよい.

それでも, これらのUはすべてたがいに等しい. なぜならば, U', U'' を 2 つの U とすれば, いたるところで意味をもつRに対していまの式が成り立つ. すなわちそのとき

$$\mathrm{Spur}(U'R)=\mathrm{Spur}(U''R)$$

である. ゆえに, $R=P_{[\varphi]}$ に対して

$$(U'\varphi, \varphi)=(U''\varphi, \varphi),\quad ((U'-U'')\varphi, \varphi)=0$$

となる. これは $\|\varphi\|=1$ であるすべての φ, したがってまた, ヒルベルト空間のすべての要素に対して成り立つから

$$U'-U''=0$$

でなければならない——したがって $U'=U''$ である.

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}) \geqq 0$$

である．したがって，

$$\mathrm{Spur}(UP_{[\varphi]}) = (U\varphi,\ \varphi) \geqq 0.$$

f が任意のとき，$f \neq 0$ に対して

$$\varphi = \frac{1}{\|f\|} \cdot f$$

と選ぶことができて，そのとき

$$(U\varphi,\ \varphi) = \frac{1}{\|f\|^2}(Uf,\ f).$$

ゆえにふたたび

$$(Uf,\ f) \geqq 0.$$

$f=0$ に対しては，これは無条件に成り立つ．したがって U は定符号である．U が定符号であることは，このように **A′.** からでてくるのであるが，逆にまたそれは **A′.** が成り立つための十分条件でもある．

A′. がいい表わしているのは，すべての $\mathrm{Erw}(\mathfrak{S}^2) \geqq 0$ でなければならないということであって，それ以上ではない：なぜなら，$\mathfrak{R}$ が負でない値だけしかとらなければ，$f(x)=|x|$ に対して

$$f(\mathfrak{R}) = \mathfrak{R},$$

また，

$$g(x) = \sqrt{|x|}$$

に対して恒等的に

$$(g(x))^2 = f(x)$$

が成り立つから，

$$(g(\mathfrak{R}))^2 = f(\mathfrak{R})$$

となり，したがって $\mathfrak{S} = g(\mathfrak{R})$ として

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{S}^2$$

だからである[168]．したがって，S が $\mathfrak{S}$ の作用素であれば，

168） 直接に

$$\mathfrak{S} = \sqrt{\mathfrak{R}}$$

とおくこと，すなわち，

$$\mathfrak{S} = h(\mathfrak{R}),\quad h(x) = \sqrt{x}$$

とおくことはできない．すべての実の x に対して定義された実数値をとる函数だけを考察しているのに，$\sqrt{x}$ はそうでない――負の x に対しては虚である――からである．

$$\mathrm{Spur}(US^2) \geqq 0$$

でなければならない．ところが S^2 は定符号である（$(S^2f,\ f)=(Sf,Sf) \geqq 0$）から，問題は，$U$, S^2 のかわりに A, B とかいたとき，つぎの定理を証明することである：A, B はエルミートかつ定符号とすれば，

$$\mathrm{Spur}(AB) \geqq 0$$

である．しかしこれは，定符号作用素にかんする一般的な定理（注 114）をみよ）を応用して II. 11. で証明したものである[169]．

こうして函数 Erw($\mathfrak{R}$) は完全に与えられた：それは定符号エルミート作用素 U に対応づけられ，その関係は ***Sp.*** によって与えられる．U は考えている集団の統計作用素とよぶことができる．

IV. 1. の注意 ***1.***, ***2.***, ***3.*** を検討することはいまや容易である．その結果はそれぞれ：

---

169) 簡単に直接証明することもできる．$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を規格化された完全直交系とし

$$a_{\mu\nu}=(A\varphi_\mu,\ \varphi_\nu),\quad b_{\mu\nu}=(B\varphi_\mu,\ \varphi_\nu),\quad \mathrm{Spur}(AB)=\sum_{\mu\nu} a_{\mu\nu} b_{\nu\mu}$$

とおく．すべての

$$\sum_{\mu\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} b_{\nu\mu} \geqq 0$$

ならば，このスプールは $\geqq 0$ である．

$$f=\sum_{\mu=1}^{N} x_\mu \varphi_\mu$$

とすれば，

$$(Af,f)=\sum_{\mu\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \geqq 0,$$

$$(Bf,f)=\sum_{\mu\nu=1}^{N} b_{\mu\nu} x_\mu \bar{x}_\nu \geqq 0$$

であるから，有限な行列

$$a_{\mu\nu},\ b_{\mu\nu}\ (\mu,\nu=1,\cdots\cdots,N)$$

もまた定符号である．$\sum_{\mu\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} b_{\nu\mu}$ が定符号であるということも，またその値自身も，N 次元の空間で直交不変である：$b_{\mu\nu}$ はエルミートであるから，（N 次元空間で!）直交変換によって対角型にすることができる．だから，$b_{\mu\nu}$ は対角型であると仮定することができる．すなわち，$\mu \neq \nu$ に対して $b_{\mu\nu}=0$. したがって，

$$\sum_{\mu\nu=1}^{N} a_{\mu\nu} b_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{N} a_{\mu\mu} b_{\mu\mu}.$$

しかるに，定符号性のために $a_{\mu\mu} \geqq 0$, $b_{\mu\mu} \geqq 0$ である（われわれは

$$x_\nu=\begin{cases}1, & \nu=\mu \text{ に対して}\\ 0, & \nu\neq\mu \text{ に対して}\end{cases}$$

とおく）から，うえの和は実際に $\geqq 0$ である．

1. 相対確率および相対期待値の立場からすれば，U と cU とには本質的な違いはない（$c>0$ は定数）.

2. $U=0$ は何ごとをも教えない．それゆえ除外すべきである．

3. 絶対的な（すなわち，正しく規格化された）確率および期待値は，

$$\mathrm{Spur}\, U=1$$

とおけばえられる．Spur U が有限であるかぎり，***1.*** にしたがって，

$$c=\frac{1}{\mathrm{Spur}\, U}$$

をかけて U を規格化することができる．（U の定符号性のために Spur $U\geqq 0$ であるが，そのうえ Spur $U>0$ である．なぜなら，IV. 1. のおわりで一般的に示したように，またわれわれの場合に対しては II. 11. から導びかれるように，Spur $U=0$ から $U=0$，すなわち，2. にしたがって除外すべき場合となるからである.）Spur U が無限大のときにはじめて，本質的に相対的な確率および期待値にであうのである．

最後に，IV. 1. の α), β) をしらべなければならない．すなわち，U のうち分散のないものおよび一様なものを見出さなければならない．

まず分散のないもの．そのとき U は正しく規格化されていると仮定しなければならない（IV. 1. をみよ）．そして，つねに

$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R}^2)=[\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})]^2$$

でなければならない．すなわち，

$$\mathrm{Spur}(UR^2)=[\mathrm{Spur}(UR)]^2.$$

$R=P_{[\varphi]}$ に対して

$$R^2=R=P_{[\varphi]},\quad \mathrm{Spur}(UP_{[\varphi]})=(U\varphi,\ \varphi)$$

であるから，

$$(U\varphi,\ \varphi)=(U\varphi,\ \varphi)^2$$

でなければならない．すなわち，

$$(U\varphi,\ \varphi)=0 \quad \text{あるいは} \quad 1$$

である．$\|\varphi'\|=1$，$\|\varphi''\|=1$ であるとき，φ を連続的に変化させて，φ' から始まって φ'' に終り，しかもそのあいだ $\|\varphi\|=1$ をたもつようにすることができる[170]．そのさい $(U\varphi,\ \varphi)$ も連続的に変化するが，それは 0 または 1 と

170) $\varphi'=\varphi''$ に対しては明らか．$\varphi'\neq\varphi''$ とする．φ', φ'' を“直交化”すると（II. 2. をみよ），$\|\varphi_1\|=1$ となる，φ' に直交する φ_1 がえられて，φ'' は φ' と φ_1 との 1

いう値だけしかとれないから，一定である——ゆえに

$$(U\varphi',\ \varphi')=(U\varphi'',\ \varphi'').$$

したがって，$(U\varphi,\ \varphi)$ はつねに $=0$，またはつねに $=1$ である．これからただちに

$$U=0 \quad あるいは \quad U=1.$$

$U=0$ は **2.** によって除かれ，$U=1$ は規格化できない（Spur 1＝空間の次元数＝∞）からだめである．この場合分散なしでないことを直接確めることも容易である．したがって，分散のない集団は存在しない．

つぎに一様な集団へ移ろう．β) および **Sp.** によれば，

$$U=V+W$$

から（V，W は U と同じく定符号かつエルミート）

$$V=c'U,\quad W=c''U$$

がでてくるとき U は一様である[171]．われわれはつぎのように主張する：この性質をもつのは $U=P_{[\varphi]}$（$\|\varphi\|=1$）であり，しかもこれだけである．

まず，U が問題の性質をもつとする．$U\neq 0$ のために，$Uf_0\neq 0$ となる f_0 がある．これから $f_0\neq 0$，したがって

$$(Uf_0,\ f_0)>0$$

（II.5.，定理 19，をみよ）．2つのエルミート作用素

次結合である．ゆえに

$$\varphi''=a\varphi'+b\varphi_1,\quad \|\varphi''\|^2=|a|^2+|b|^2=1.$$

例えば

$$|a|=\cos\theta,\quad |b|=\sin\theta,$$

すなわち

$$a=e^{i\alpha}\cos\theta,\quad b=e^{i\beta}\sin\theta$$

とすれば，

$$a^{(x)}=e^{ix\alpha}\cos x\theta,\quad b^{(x)}=e^{ix\beta}\sin x\theta$$

に対してもまた

$$|a^{(x)}|^2+|b^{(x)}|^2=1.$$

したがって

$$\varphi^{(x)}=a^{(x)}\varphi'+b^{(x)}\varphi_1$$

に対して

$$\|\varphi^{(x)}\|=1.$$

そして，$\varphi^{(x)}$ は φ' から（$x=0$）φ'' まで（$x=1$）連続に変化する．

171） 本来われわれは，**2.** によって $V\neq 0$，$W\neq 0$ を要求するのであるが，それぞれ $c'=0$，$c''=1$ または $c'=1$，$c''=0$ として $V=0$ あるいは $W=0$ の場合も含める．

$$Vf=\frac{(f,\ Uf_0)}{(Uf_0,\ f_0)}\cdot Uf_0,\quad Wf=Uf-\frac{(f,\ Uf_0)}{(Uf_0,\ f_0)}\cdot Uf_0$$

をつくると，

$$(Vf,\ f)=\frac{|(f,\ Uf_0)|^2}{(Uf_0,\ f_0)}\geqq 0,$$

$$(Wf,\ f)=\frac{(Uf,\ f)(Uf_0,\ f_0)-|(f,\ Uf_0)|^2}{(Uf_0,\ f_0)}\geqq 0$$

である (II.5., 定理 19 をみよ). すなわち，V, W は定符号で，そのうえ，明らかに

$$U=V+W$$

である．

$$V=c'U$$

であるが，

$$Vf_0=Uf_0\neq 0$$

のために $c'=1$，すなわち

$$U=V.$$

いま

$$\varphi=\frac{1}{\|Uf_0\|}\cdot Uf_0\quad (\|\varphi\|=1),$$

$$c=\frac{\|Uf_0\|^2}{(Uf_0,\ f_0)}\qquad (c>0)$$

とおけば，

$$Uf=Vf=c(f,\ \varphi)\varphi=cP_{[\varphi]}f.$$

すなわち，

$$U=cP_{[\varphi]}.$$

すなわち，*1.* にしたがえば U は本質的には $P_{[\varphi]}$ である．

こんどは逆に

$$U=P_{[\varphi]}\qquad (\|\varphi\|=1)$$

とする．

$$U=V+W$$

のために，V, W は定符号であるから，つぎのように論を進める．$Uf=0$ ならば，

$$0\leqq(Vf,\ f)\leqq(Vf,\ f)+(Wf,\ f)=(Uf,\ f)=0,$$

$$(Vf,\ f)=0.$$

したがって

$$Vf=0$$

(まえのところをみよ). しかるに

$$(f,\ \varphi)=0$$

ならば,

$$Uf=P_{[\varphi]}f=0,$$

であるから, このときにはまた

$$Vf=0;$$

ゆえにすべての g に対して

$$(f,\ Vg)=(Vf,\ g)=0.$$

すなわち, φ に直交するものはすべて, Vg にも直交する. したがって

$$Vg=c_g\cdot\varphi$$

(c_g は g に依存する数). しかし, われわれは

$$g=\varphi,\ すなわち\quad V\varphi=c'\cdot\varphi$$

の場合だけを使う. すべての f は

$$(f,\ \varphi)\cdot\varphi+f'$$

という形をもち, f' は φ に直交するから,

$$Vf=(f,\ \varphi)\cdot V\varphi+Vf'=(f,\ \varphi)\cdot c'\varphi=c'P_{[\varphi]}f=c'Uf$$

である. したがって,

$$V=c'U,\quad W=U-V=(1-c')U$$

となり, これですべて証明された.

したがって, 一様な集団は

$$U=P_{[\varphi]},\quad \|\varphi\|=1$$

に対応し, そのとき **Sp.** も III. 1. の公式 **E₂.** になる:

(**E₂.**)
$$\mathrm{Erw}(\mathfrak{R})=\mathrm{Spur}(P_{[\varphi]}R)=(R\varphi,\ \varphi),$$
$$\mathrm{Erw}(1)=\mathrm{Spur}(P_{[\varphi]})=1$$

であること (なぜなら $P_{[\varphi]}$ は 1 次元の $[\varphi]$ に属するから. または **E₂.** によって), すなわち, いまの U の形は正しく規格化されていることに注意しよう. 最後になお, $P_{[\varphi]}$ と $P_{[\psi]}$ とが同じ統計をもつのはどんなときか, すなわちいつ

$$P_{[\varphi]}=cP_{[\psi]}\qquad (c>0\ は定数,\ \mathit{1}.\ をみよ)$$

となるかを確めなければならない.

$$\mathrm{Spur}(P_{[\varphi]}) = \mathrm{Spur}(P_{[\psi]}) = 1$$

によって，そのとき $c=1$ であるから，

$$P_{[\varphi]} = P_{[\psi]}, \quad [\varphi] = [\psi],$$

したがって

$$\varphi = a\psi,$$
$$\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$$

から定数 a に対しては

$$|a| = 1;$$

明らかにこれは十分条件でもある.

総括すればつぎのようにいうことができる：分散のない集団は存在しない. 一様な集団は存在するが，それは

$$U = P_{[\varphi]}, \quad \|\varphi\| = 1$$

に対応し，そしてこれだけである. この U に対して **Sp.** は **E₂.** に一致する. 規格化は正しい. そして φ を $a\varphi$ (a は定数で $|a|=1$) でおきかえても U は変化しないが，φ のそのほかの変化にさいしては本質的な変化をうける (**I.** をみよ). したがって一様な集団は以前に特徴づけたように，量子力学の状態に対応し，それは $\|\varphi\|=1$ をみたすヒルベルト空間の φ によって表わされる. φ にかかる絶対値 1 の定数因子は意味をもたない (例えば III. 2. をみよ). そして，統計的命題は **E₂.** によっていい表わされる[172].

これらすべては，純粋に定性的な条件 **A′.**, **B′.**, α), β), **I.**, **II.** から導かれたものである.

こうして，われわれの条件の枠のなかで判断がくだされた. しかも因果性に対して否定的に：というのは，すべての集団は，たとえ一様であっても，分散しているからである.

なお III. 2. で提出された“かくれたパラメーター”の問題を論じなければならないであろう. すなわち，波動函数 φ によって (すなわち，**E₂.** によって)

---

172) この2つの段落でのべた，一様な集団を導きだす演繹は著者が Gött, Nachr, 1927 で与えたものである. 一様な集団の存在，あるいは，それと一般の集団との関係はそれぞれ独立に H. Weyl が Z. Physik. Bd. 46 (1927) で，また著者がさきの論文で見出した. 一般の集団の特別の場合 (すなわち，2つの結合された系，VI: 2. の議論をみよ) はすでに，より以前の L. Landau; Z. Physik Bd. 45 (1927) に見出される.

表わされる一様な集団の分散は，これが真の状態ではなくて多くの状態の混合にすぎないことにもとづいているのかどうかという問題である——そうだとすれば，実際の状態を表わすには波動函数 φ のほかにそれ以上の与件（それが“かくれたパラメーター”である）が必要であり，それら全部がすべてを因果的に決定する，すなわち，分散のない集団へ導くということになる．そのとき一様な集団（$U=P_{[\varphi]}$, $\|\varphi\|=1$）の統計は，それをつくりあげているすべての真の状態についての平均，すなわち，それぞれの状態において“かくれたパラメーター”が有している値の領域にわたってとった平均によって生ずる．これは２つの根拠から不可能である：第１に，そのとき考えている一様な集団は，その定義に反して２つの異った集団の混合として表わされなければならない[173]．第２に，“現実の”状態に対応するはずの（すなわち，同じ“現実の”状態にある系だけからなる）分散のない集団はけっして存在しないからである．ここでは“かくれたパラメーター”の機構の個々の詳細にさらに深く立ちいる必要はまったくないということに注意しよう：量子力学の確固とした結果は“かくれたパラメーター”によってはけっして再現することができない．実際，波動函数のほかに他の決定因子（“かくれたパラメーター”）が存在すべきだとすれば，同じいくつかの物理量が同じ結合関係のもとに存在する（すなわち，***I.***, ***II.*** が成り立つ）ということは排除されるのである．

量子力学において作用素によって表現されるところのこれまでに知られた物理量のほかになお，これまで発見されていない量が存在するとすれば，この議論は十分でないであろう．なぜなら，これまでに知られた量においてさえ，量子力学の仮定する諸関係（すなわち．***I.***, ***II.***）が役に立たなくなるからである．したがって要素過程のふるまいが統計的以外のものでありうるためには，しばしばいわれたように量子力学の解釈が問題になるのではなく，むしろ量子力学が客観的に誤っているのでなければならない．

なおつぎの事情は述べておく価値がある：不確定性関係は一見したところ，なにか相対性理論の基礎的要請に似ているようにみえる．すなわち，それはこう主張している：距離 r だけはなれた点における２つの事件の同時性を，長さ

173）“かくれたパラメーター”を全体として π で表わし，これが離散的な値 π_1, π_2, ……, π_n ($n>1$) だけをとるとき，一方は $\pi=\pi_1$ の系を含み，他方は $\pi\neq\pi_1$ の系を含む２つの集団がえられる．この２つの混合がもとの集団である．π がある領域 Π のうえで連続的に変化するならば，Π の部分領域を Π' として，１つの集団は Π' に属する π をもつ系を含み，他方は Π' に属さない π をもつ系を含むとする．

$\frac{r}{c}$($c=$ 光速度）の時間区間より精確に確定することは原理的に不可能である；他方不確定性関係はこういっている：位相空間のなかの物質粒子の位置を体積 $\left(\frac{h}{4\pi}\right)^3$ の領域よりも精確に与えることは原理的に不可能である[174)]. しかしながら，根本的な違いがある．たしかに相対性理論は，客観的な精確な同時性の測定をまったく否定する．それにもかかわらず１つのガリレイ基準系を導入することによって，われわれの正常な概念に十分近い同時性の定義を可能ならしめるような座標系を時空世界のなかに実現することが可能である．この座標系は無限に多くの異った方法で選ぶことができ，したがって，いずれも等しく許される無限に多くの異った同時性の定義が生ずるということだけのために，この定義に客観的な意味を認めることができない．すなわち，測定の不可能性の背後に，可能な理論的定義の無限の多意性が見出されるのである．量子力学においては異っている：そこでは，波動函数φをもつ系を位相空間の点で表わすことは，まったく不可能である．新しい（仮定的な，観測されない）座標，“かくれたパラメーター”を導入してもやはり不可能である．なぜなら，それは分散のない集団へ導くであろうから．すなわち，測定が不可能なだけでなく，すべての合理的な（すなわち，相対性理論と同様経験的には証明されないとしても，少くとも経験によって否定されない）理論的定義もまた不可能である．したがって，測定の原理的な不可能性の根拠は，問題の概念を規定する，直接的な経験（あるいは理論の一般的な基本仮定）に矛盾しない定義が，一方では無限に多様であり，他方ではまったく存在しないということである．

以上をまとめると，こんにちの物理学における因果性の位置づけはつぎのように表わされる：巨視的な物理学では，因果性を支持する経験はないし，またありえない．なぜなら，大局的な世界（すなわち裸の眼で認められる対象）のみかけの因果的秩序は，確かに“大数の法則”以外の原因をもっておらず，要素過程を支配している（すなわち現実の）自然法則が因果的であるかないか

174) 位相空間は６次元である．そのうち３つの座標は質点の３つのデカルト座標 q_1, q_2, q_3 であり，３つはこれに対応する運動量 p_1, p_2, p_3 である．Ⅲ.4. により，それぞれの分散 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ に対して

$$\varepsilon_1\eta_1 \geqq h/4\pi, \quad \varepsilon_2\eta_2 \geqq h/4\pi, \quad \varepsilon_3\eta_3 \geqq h/4\pi,$$

すなわち

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\eta_1\eta_2\eta_3 \geqq (h/4\pi)^3$$

が成り立つ．そしてこの体積の範囲では，古典力学の位相空間における位置はいつも不確定である．

にはまったく依存しないからである[175]．巨視的に等しい対象が巨視的に等しくふるまうということは，因果性にはほとんど関係がない：それらの原子の状態を精確に規定する座標はけっしてといっていいほど一致することがないのだから，それらは実際けっして等しくないのである．ただ巨視的な考察の仕方は，これらの座標（ここでは“かくれたパラメーター”である）を平均化するのであるが，座標の数がたいへん大きい（物質 1gr あたりやく 10^{25}）から，この平均化は，確率論のよく知られた定理によって，結果としてはすべての分散をいちぢるしく少さくしてしまうのである（もちろん一般的にのみそうなる．特別の場合——例えばブラウン運動，不安定状態その他これに類するもの——には，このみかけの巨視的因果性もやぶれる）．原子世界においてはじめて，要素過程それ自身について，因果性を現実的な問題としてしらべることができる．しかしここでは，こんにちのわれわれの知識の状態では，すべてが因果性に対して否定的である．なぜなら，なかば満足な方法でわれわれの経験を秩序づけ総括する，唯一のさしあたって存在している形式的な理論，それは量子力学であるが，それは因果性とのいかんともしがたい論理的矛盾につきあたるからである．もちろん，因果性がそれによってすてられたと主張することはいいすぎであろう：量子力学はこんにちの形では確かに不完全である．そしてそれが間違っているということもありうる——もっとも，一般的な理解および特殊問題の計算における，あきれるばかりの有効性をまえにしては，およそそんなことはありそうにないが．量子力学は経験と輝かしい一致を示し，また世界の質的に新しい側面への認識をひらいてくれるけれども，それでもある理論について，それが経験によって証明されたなどということはけっしてできない．ただ，経験の知られているうちで最良の総括であるといえるだけである．しかし，すべてこれらの留保をしたうえでつぎのようにいうことは許されるであろう：自然における因果性について語るなんの動機も，またなんの口実もない——なぜならば，巨視的な経験は因果性を語るには原理的に適しておらず，要素過程にかんするわれわれの経験に調和した唯一の知られている理論である量子力学は，因果性に矛盾しており，けっきょく，因果性の存在を支持するようななんらの経験もないからである．

問題となるのはもちろん，すべての人々に古くからしみこんだ考え方であり，

175) Schrödinger のこれに関連したきわめて輝かしい論文：Naturwiss. Bd. 17 (1929) Heft 37 を参照．

けっして思惟の必然性ではない（なによりも，とにかく統計的理論を確立することができたという事実がそのことを示している）．そして，先入観をもたずに対象に近づくものは，古い考え方に固執するなんの根拠ももたないのである．そのような事情のもとで，合理的な物理学の理論を古くからの考え方のぎせいにするという動機が存在するであろうか？

3. 測定結果から導かれる集団

まえの節で，われわれの定性的な基本仮定に合致するもっとも一般的な統計集団は，法則 **Sp.** にしたがい，定符号の作用素 U によって特徴づけられることが明らかにされた．われわれが一様な集団とよんだところの特別な集団は，

$$U=P_{[\varphi]} \qquad (\|\varphi\|=1)$$

によって特徴づけられた．これは系 S の真の（それ以上分解できない）状態であるから，われわれはこの集団をも状態（しかも $U=P_{[\varphi]}$ を状態 φ と）とよぶ．

もし U が，たとえば固有値 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ および（規格化され完全直交系を作る）固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を有する，純粋な点スペクトルをもつ作用素ならば，

$$U=\sum_n w_n P_{[\varphi_n]}$$

であり（II.8. をみよ），U の定符号性のためにすべての $w_n \geqq 0$ である［事実 $U\varphi_n=w_n\varphi_n$，したがって $(U\varphi_n, \varphi_n)=w_n$，したがってこれは $\geqq 0$］．そして

$$\sum_n w_n=\sum_n (U\varphi_n, \varphi_n)=\mathrm{Spur}\ U$$

（また IV.1 のはじめを参照せよ），すなわち，もし U が正しく規格化されておれば，

$$\sum_n w_n=1.$$

かようにして，IV.1. のはじめに述べたことにより，状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をそれぞれ相対的重み $w_1, w_2, \cdots\cdots$ で混ぜた混合として U を理解することができる——U が正しく規格化されているときにはこれらの重みは絶対的にも正しいものとなる．

正しく規格化された U，すなわち $\mathrm{Spur}\ U=1$ は II.11.（とくに注 115）

をみよ）によって完全連続であり，そのために純粋な点スペクトルをもつ．同じことは Spur U が有限であるときにももちろん成り立つ．（無限大の Spur U は極限の場合とみなすことができるが，それについてはここではくわしく立ちいることをしない.）したがって，本来興味のある場合には，問題とする集団を状態の混合として表わすことができる．なおそれらの状態はたがいに直交するようにえらばれているとする．それゆえ，われわれは一般的な集団を（一様なもの，状態に対して）混合とよぶことにしよう．

もし U のすべての固有値が1重であれば，つまり $w_1, w_2 \cdots\cdots$ がおたがいに異っていれば，よく知られているように $\varphi_1, \varphi_2 \cdots\cdots$ は絶対値1の定数因子を除いて一意的に確定しており，それらに対応する状態もまた完全に決定されている．まったく同様に重み $w_1, w_2, \cdots\cdots$ も——もちろん順番を除いて——一意的に確定している．したがってこの場合には，混合 U がいかなる（たがいに直交する）状態から成り立っているかを一意的に定めることができる．しかし，U が多重固有値（"縮退"）をももつときには，まったくちがったことになる．II. 8. でどのようにして $\varphi_1, \varphi_2 \cdots\cdots$ をえらぶことができるかを詳しく論じた：それは無限に多くの，まったく異ったやり方で行われる（$w_1, w_2, \cdots\cdots$ の方はこのときにも一意的に確定されるが）．$w_1, w_2, \cdots\cdots$ のうちでたがいに異ったものを書きならべなければならない：$w', w'', \cdots\cdots$，その各々に対して固有函数（すなわち $Uf=wf$ の解）の作る閉じた線型多様体，$\mathfrak{M}_{w'}, \mathfrak{M}_{w''}, \cdots\cdots$ を与え，それから以下のように進む．各 $\mathfrak{M}_{w'}, \mathfrak{M}_{w''} \cdots\cdots$ からそれを張る規格化直交系 $\chi_1', \chi_2' \cdots\cdots$ および $\chi_1'', \chi_2'', \cdots\cdots$，等々を任意にえらびだす．すると $\chi_1', \chi_2', \cdots\cdots, \chi_1'', \chi_2'' \cdots\cdots, \cdots\cdots$ は求める $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ であり，対応する固有値 $w_1', w_1', \cdots\cdots, w_1'', w_1'', \cdots\cdots, \cdots\cdots$ が $w_1, w_2, \cdots\cdots$ である．1つの $\mathfrak{M}_w$ が1より大きな次元をもつやいなや，すなわち，多重固有値が1つでも存在するならば，それに属する $\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ はもはや絶対値1の定数因子を除いて確定するというわけにはいかなくなる（たとえば χ_1 は $\mathfrak{M}_w$ の任意の規格化された要素であってよい)——すなわちその状態もまた多意的になる！

この事情はまたつぎのように定式化される：状態 $\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ がおたがいに直交するとし（すなわち，$\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ が有限であっても無限であってもよいが規格化直交系を作る)，それらをすべて同じ重み（すなわち相対的な重み $1:1:\cdots\cdots$）を与えて混ぜ合せれば，そのようにして生ずる混合は $\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ が張る閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}$ にだけ依存する．実際に

$$U=P_{[\chi_1]}+P_{[\chi_2]}+\cdots\cdots=P_{\mathfrak{M}}$$

である．$\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ の数が有限，たとえば s 個：$\chi_1, \cdots\cdots\chi_s$ であるならば，この U はまた $\mathfrak{M}$ のすべての規格化された要素の，すなわち $\mathfrak{M}$ のすべての状態の混合とみなされうる．このような要素は

$$\chi=x_1\chi_1+\cdots\cdots+x_s\chi_s, \quad |x_1|^2+\cdots\cdots+|x_s|^2=1$$

である．事実，もし

$$x_1=u_1+iv_1, \cdots\cdots, x_s=u_s+iv_s$$

とおき，$|x_1|^2+\cdots\cdots+|x_s|^2=1$ に対応する $2s-1$ 次元の単位球の表面

$$u_1^2+v_1^2+\cdots\cdots+u_s^2+v_s^2=1$$

を K とよび，その表面要素を do とよぶならば，

$$U'=\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int P_{[\chi]}do$$

に対して

$$(U'f, g)=\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int(P_{[\chi]}f, g)do$$

$$=\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int(f, \chi)\overline{(g, \chi)}do$$

$$=\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int\Bigl(f, \sum_{\mu=1}^{s}(u_\mu+iv_\mu)\chi_\mu\Bigr)\overline{\Bigl(g, \sum_{\mu=1}^{s}(u_\mu+iv_\mu)\chi_\mu\Bigr)}do$$

$$=\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int\sum_{\mu,\nu=1}^{s}(f, \chi_\mu)\overline{(g, \chi_\nu)}(u_\mu-iv_\mu)(u_\nu+iv_\nu)do$$

$$=\sum_{\mu,\nu=1}^{s}(f, \chi_\mu)\overline{(g, \chi_\nu)}\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int[(u_\mu u_\nu+v_\mu v_\nu)+i(u_\mu v_\nu-u_\nu v_\mu)]do;$$

したがって，すべての $u_\mu v_\nu$, $u_\nu v_\mu$ 積分も，同様に $u_\mu u_\nu$, $v_\mu v_\nu$ 積分も $\mu\neq\nu$ のときには対称性の理由から $=0$ であり[176]，$\mu=\nu$ のときにはこれらの積分はすべて $=C/2s$ $(C>0)$[176] であるから，つぎの式が成り立つ；

---

176) $u_\mu\to -u_\mu$（あるいは $u_\nu\to -u_\nu$, および $v_\mu\to -v_\mu$）は K についての対称な操作であり，そのさい第1の被積分函数の符号が変るからその積分は0に等しい．$u_\mu\to v_\mu$, $v_\mu\to u_\mu$ あるいは $u_\mu\to u_\nu$, $u_\nu\to u_\mu$ はそれぞれこのような K について対称な操作であり，それらによってあとの場合の積分はたがいに他に移る．したがってそれらの積分はたがいに等しく，それゆえそれらの和の $1/2s$ 倍である：

$$\int\!\!\int_K\cdots\cdots\int\!\!\int(u_1^2+v_1^2+\cdots\cdots+u_s^2+v_s^2)dv=\int\!\!\int\cdots\cdots\int\!\!\int_K dv=K \text{ の表面積}.$$

これを C とよぶ．

$$(U'f,\ g)=\frac{C}{s}\sum_{\mu=1}^{s}(f,\ \chi_\mu)\overline{(g,\ \chi_\mu)}=\frac{C}{s}\sum_{\mu=1}^{s}(P_{[\chi_\mu]}f,\ g)$$
$$=\left(\left\{\frac{C}{s}\sum_{\mu=1}^{s}P_{[\chi_\mu]}\right\}f,\ g\right).$$

このようにして

$$U'=\frac{C}{s}\sum_{\mu=1}^{s}P_{[\chi_\mu]}=\frac{C}{s}U,$$

すなわち U', U は本質的には異ならない.

このことがらは量子力学的統計の性格にとって大きな意味をもつから，それをくりかえしておく：

1. 1つの混合が，まったく等しい重みをもち，かつたがいに直交する諸状態からできているならば，それらの諸状態がどんなものであったかを決定することはもはやできない——いいかえると，正確に等しい比で混合することによって，異った（たがいに直交する）成分から同一の混合を作ることができる.

2. このようにしてえられた混合は，もし有限個の成分の場合であれば，これらの成分の1次結合で作られるすべての状態の混合と一致する.

このような場合のもっとも簡単な例をあげる：φ, ψ（直交する!）を 1:1 に混ぜると，そのときできるものは，たとえば $\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}}$, $\frac{\varphi-\psi}{\sqrt{2}}$ を 1:1 に，あるいはまたすべての $x\varphi+y\psi$ ($|x|^2+|y|^2=1$) を混ぜ合せたものと同じである. もし2つの直交しない φ, ψ を混ぜるならば（比はなにも 1:1 である必要はない），できあがった混合においてそれらをふたたび認めることはますますもって不可能である——というのは，これはたしかにまた直交する状態の混合ともみなされうるからである.

混合のもつ性質をさらに立ちいって論ずることは V.2 以下の熱力学的詳論までのばすことにする——

IV.2 の公式 **Sp.** は，統計作用素 U をもつ混合において作用素 R をもつ量 $\mathfrak{R}$ の期待値をいかに計算すべきかを示している：それは $\mathrm{Spur}(UR)$ である. $\mathfrak{R}$ の値 a が区間 $a'<a\leqq a''$ (a', a'' は与えられている，$a'\leqq a''$) にあるという確率は, III.1. あるいは III.5 におけるように，つぎのごとく求められる：

$$F(x)\begin{cases}=1, & a'<x\leqq a'' \text{ に対して},\\ =0, & \text{その他のとき},\end{cases}$$

という函数を用いて量 $F(\mathfrak{R})$ を作ると，それの期待値が求める確率である.

ところで $F(\mathfrak{R})$ は (IV.2 の *I.* にしたがって) 作用素 $F(R)$ をもつ. そして, もし $E(\lambda)$ がRに属する単位の分解であれば, 何度も計算したように,

$$F(R)=E(a'')-E(a')$$

であり, 求める確率は

$$w(a',\ a'')=\mathrm{Spur}\ U(E(a'')-E(a'))$$

である. このようにして $\mathfrak{R}$ の統計を記述する確率函数は

$$w(a)=\mathrm{Spur}\ UE(a)$$

である (IV.1., 注 175) をみよ; 状態, すなわち $U=P_{[\varphi]}$ に対しては, ふたたび

$$w(a)=\mathrm{Spur}\ P_{[\varphi]}E(a)=(E(a)\varphi,\ \varphi)$$

となる). いうまでもなく, これらの確率函数は U が正しく規格化されてないときには相対的なものにすぎない.

統計作用素 U をもつ混合において, 作用素 R をもつ量が確実に値 λ^* をとるのはいかなるときかという問題は $w(a)$ を使ってただちに解答される: $a<\lambda^*$ に対しては $w(a)=0$ でなければならない. また $a\geqq\lambda^*$ に対しては, $w(a)=1$, あるいは, U が正しく規格化されていないときには, $=\mathrm{Erw}(1)$ $=\mathrm{Spur}\ U$ でなければならない. すなわち,

$$a<\lambda^* \text{ に対して } \quad \mathrm{Spur}\ UE(a)=0,$$
$$a\geqq\lambda^* \text{ に対して } \quad \mathrm{Spur}\ U(1-E(a))=0\text{[177)]},$$

ところで定符号の作用素 $A,\ B$ に対して $\mathrm{Spur}(AB)=0$ から $AB=0$ が結論されるから (II.11 をみよ), $a<\lambda^*$ に対して $UE(a)=0$ および $a\geqq\lambda^*$ に対して $UE(a)=U$ である. あるいは, 積のエルミート性のために2つの因子は交換可能でなければならないから, 同じことになるのであるが, それぞれ $E(a)U=0$ あるいは $=U$. すなわち $f=Ug$ に対して,

$$E(a)f\begin{cases}=f, & a\geqq\lambda^* \text{ のとき,}\\ =0, & a<\lambda^* \text{ のとき}\end{cases}$$

---

177) Spur U が無限大であるときには, 最後の引算によってえられた式は疑わしく思われるかもしれない. しかしながら, それはまたつぎのように証明することもできる: $\mathfrak{R}$ が値 λ^* をもつということは, λ^* が $>a''$ あるいは $\leqq a'$ のとき $w(a',a'')=0$, すなわち $\mathrm{Spur}\ U(E(a'')-E(a'))=0$ であることを意味する. この Spur はつねに $\geqq 0$ であり, a'' について非減少で, 同時に a' について非増大であるから, $a''<\lambda^*$ のときそれの $\lim\limits_{a'\to-\infty}$ を, $a'\geqq\lambda^*$ のとき $\lim\limits_{a''\to+\infty}$ を考察すればよい. すなわち, $a''<\lambda^*$ に対して $\mathrm{Spur}\ UE(a'')=0$, $a'\geqq\lambda^*$ に対して $\mathrm{Spur}\ U(1-E(a'))=0$ である.

であり，II.8 で遂行した議論によってこれは

$$Rf=\lambda^*f$$

を意味する，つまり g のいかんにかかわらず，つねに

$$RUg=\lambda^*Ug.$$

かようにして決定的な条件は

$$RU=\lambda^*U$$

である．あるいは，$Rh=\lambda^*h$ のすべての解によって作られる閉じた線型多様体を $\mathfrak{M}$ で表わすと，それは Uf がつねに $\mathfrak{M}$ にあることである．

なお，同じ結果はまた分散，すなわち $(\mathfrak{R}-\lambda^*)^2$ の（場合によっては相対的な）期待値が消えることからも求めることができたであろう．——

われわれは III.3 で以下の質問に答えた（$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… は物理量，R, S, …… はそれらの作用素とする）:

1. どのようなときに $\mathfrak{R}$ は絶対的に精確に測定可能であるか？ 答：R が純粋な点スペクトルをもつとき．

2. どのようなときに $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ は同時に絶対的に精確に測定可能であるか？ 答：R, S が純粋な点スペクトルをもち，かつ交換可能であるとき，

3. どのようなときに 2 つ以上の量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… は同時に絶対的に精確に測定可能であるか？ 答：R, S, …… が純粋な点スペクトルをもち，かつすべて交換可能であるとき．

4. どのようなときに 2 つ以上の量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, …… は同時に任意に精確に測定可能であるか？ 答：R, S, …… がすべて交換可能であるとき．

そのさいわれわれは Compton-Simon の実験結果から抽象したつぎのような原理を利用した：

(***M.***) 1つの系 S で物理量 $\mathfrak{R}$ を2回すぐ続けて観測すれば，2回とも同じ値がえられる．このことは，たとえ $\mathfrak{R}$ が S の最初の状態において分散をもち，そのうえ $\mathfrak{R}$ の観測が S の状態を変化させうるにもかかわらず，成り立つ．

われわれは III.3 で M の物理的な意味をあますところなく論じておいた．***1.—4.*** に答えるのに必要なそれ以外の仮定はつぎのとおりであった：状態に対する統計的公式，III.3 の E_2.；III.3. の仮定 F：それによって $\mathfrak{R}$ が作用素 R をもつとき $F(\mathfrak{R})$ は作用素 $F(R)$ をもつ；（同時に測定可能な）量 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ がそれぞれ作用素 R, S をもつとき $\mathfrak{R}+\mathfrak{S}$ が作用素 $R+S$ をもつ，という仮定．

これら3つの仮定はふたたびわれわれが利用できるところであり（最初のものは IV. 2 の公式 ***Sp.*** から導かれ，他の2つは IV. 2. の ***I, II*** に対応する）．そして ***M.*** もまた妥当なものと考えるべきであるから――なぜなら，われわれはそれが量子力学の概念的構成にとって不可欠であると認めたからである――III. 3. で ***1.—4.*** に対して与えた証明はここでもまた成り立つ．したがって示された答はここでもふたたび正しい．

III. 5. においてわれわれは2つの値 0, 1 のみをとる物理量を研究した．それは性質 $\mathfrak{E}$ に1対1に対応した．なぜなら，$\mathfrak{E}$ が与えられたならば，その量をつぎのように定義することができたからである：$\mathfrak{E}$ が存在するかしないかを決定することによってそれは観測され，その値はそれぞれ1か0である；逆にその量が与えられたならば，$\mathfrak{E}$ は問題の量が値1（すなわち0でない）をもつという性質である．III. 5. の ***F***（すなわち IV. 2. の***I.***）から，対応する作用素 E はまさしく射影作用素であり，それに限られることが結論される．$\mathfrak{E}$ が現われているという確率は，うえに定義した量の期待値に等しかった．III. 5. ではそれが状態 φ（すなわち $U=P_{[\varphi]}$, $\|\varphi\|=1$）に対してのみ求められたが，それは ***Sp.*** によって一般の場合にも決めることができる：その確率は Spur(UE) である（相対的！絶対的なのは U が正しく規格化されているとき，すなわち Spur $U=1$ であるときにかぎる）．

1.—4. は確立されたのであるから，それから導かれる主張，III. 5. の α)—ζ) も同様に確かに成立する；もちろん，そこで α) はただ状態にだけかかわるものであったことに注意しなければならないが，それはただちにすべての混合にも拡張される：

α') 統計的作用素 U をもつ混合において性質 $\mathfrak{E}$ がある，もしくはないという確率はそれぞれ

$$\mathrm{Spur}(UE) \quad \text{あるいは} \quad \mathrm{Spur}(U(1-E))$$

である（相対的！U が正しく規格化されているとき，すなわち Spur $U=1$ のときにのみ絶対的）．

2つ以上の量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ を問題にする場合を考える．しかも $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ はそれぞれ作用素 $R_1, \cdots\cdots R_l$ をもち，それらの作用素には単位の分解 $E_1(\lambda)$, $\cdots\cdots, E_l(\lambda)$ が属するとしよう．さらに l 個の区間 $I_1: \lambda_1'<\lambda\leq\lambda_1''$, $\cdots\cdots$, $I_l: \lambda_l'<\lambda\leq\lambda_l''$ があたえられており，$E_1(I_1)=E_1(\lambda_1'')-E_1(\lambda_1')$, $\cdots\cdots$, $E_l(I_l)=E_l(\lambda_l'')-E_l(\lambda_l')$ とおくことにする．このとき“$\mathfrak{R}_1$ が I_1 にある”, $\cdots\cdots$,

“$\mathfrak{R}_l$ が I_l にある”という性質にそれぞれ射影作用素 $E_1(I_1), \cdots\cdots, E_l(I_l)$ が属する（ζ をみよ）．これらがすべて同時に決定できるかどうかは，$E_1(I_1), \cdots\cdots, E_l(I_l)$ の交換可能性によって決まる（γ をみよ）．そしてそれが同時に成立するということに対する射影作用素は $E=E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)$ である（ε をみよ）．したがってそれに対する確率は $\mathrm{Spur}(UE)$ である（α' をみよ）．

さて，こんどは逆の方向をとって進もう：われわれは系 S の状態を知らないが，そのかわり S に対してある測定を行って，その結果を知っているものと仮定しよう．たしかに現実においてはつねにこのような事態になっている．というのは，われわれは測定結果からのみ S の状態について何かを知ることができるからである．げんみつにいうと，状態というのはたんに理論上の構成物にすぎず，実際にあるのはただ測定結果だけである．そして物理学の任務は過去と未来の測定結果のあいだの関係を見出すことなのである．いうまでもなくこれはいつも“状態”という補助概念を導入することによって行われるが，しかしその場合には物理学の理論は，一方では過去の測定結果から現在の状態を，そして他方では現在の状態から未来の測定結果をどのようにして結論するかを教えなければならない．いままでは，第2の問題だけを取扱ってきた．これからは第1の問題に向わなければならない．

過去の測定が現在の状態を一意的に確定するには不十分であるときにも，場合によっては個々の状態がいかなる確率で存在するかをその測定結果から推測することができる（これは量子力学におけるとまったく同様に因果的な理論，たとえば古典力学においても成り立つ）．したがって本来の課題はこうである：与えられた測定結果に対して1つの混合を見出すこと，すなわち，1つの系 S に対してその測定が行われ，それが当該の結果を与えたということだけがわかっている場合に，その系に対して期待されるのと同一の統計をもつような混合を見出すことである．もちろん，S について“これだけを知っている”そしてそれ以上は知らないということが何を意味するのか――そしてこれをどのようにして1つの統計へ導くかをもう少し正確に指示しなければならない．

統計との関係はいかなる場合でもつぎのとおりでなければならない：多くの系 $S_1', \cdots\cdots, S_M'$（いずれも S の標本！）に対してこの測定が当該の結果をあたえたとき，この集団 $[S_1', \cdots\cdots, S_M']$ はあらゆる統計的性質にかんして，うえでこの測定結果に対応させられた混合と一致する．当該の測定結果がすべての $S_1', \cdots\cdots, S_M'$ に対して等しいものであったということは，**M.** にしたが

ってつぎの手続きによって生じたと考えることができる：最初に大きな集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ が与えられていて，それについて問題の測定を行う．そして，望みどおりの結果がえられた要素を一緒にして新しい集団を作つた——そうするとこれが $[S_1', \cdots\cdots, S_M']$ である．もちろん，こんどはなにもかも $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ がどのようにえらばれるかにかかっている．この出発点になる集団はいわば 系 S の個々の状態に対する事前確率を与える．もちろん，この事情全体は一般的な確率論においてよく知られているものである：測定結果から状態へ，すなわち結果から原因を推論することができるためには，すなわち事後確率を計算することができるためには，事前確率を知らなければならない．一般にこれはさまざまなやり方でえらぶことができる．それゆえ，われわれの問題も一意的に答えられないが，量子力学の特種な事情のもとでは，出発点となる集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$（すなわち事前確率）のある１つの決め方が，とくに他から区別してえらばれることがわかるであろう．

S の状態を完全に決定するのに十分なだけ多くの測定結果を利用できるときは，事情はちがったものになる．どのようなときにこの事態が現われるかはまもなくわかるだろう．

最後になおつぎのことにふれておく：S にかんする若干の測定結果が知られているというかわりに，ある１つの性質 $\mathfrak{E}$ にかんして S を調べ，その存在が確かめられたということもできる．α)—ζ) からわれわれはこれらの事柄がいかに関連しあっているかを知っている：たとえば，量 $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_l$ の値がそれぞれ区間 $I_1, \cdots\cdots, I_l$ にあるという，同時に確定できる測定結果があるときには，（まえに使った記号を用いて）$\mathfrak{E}$ の射影作用素は $E=E_1(I_1)\cdots\cdots E_l(I_l)$ である．

したがって，S にかんする知識はつねにある１つの性質 $\mathfrak{E}$ の存在に帰せられる．その性質は形式的には射影作用素 E を定めることによって特徴づけられる．求めるものは，S に等価な集団 $[S_1', \cdots\cdots, S_M']$ の統計的作用素 U，同様にまた一般的な出発点となる集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ の統計的作用素 U_0 である．E, U, U_0 のあいだの数学的関係はいかなるものであろうか？

M. のために，$[S_1', \cdots\cdots, S_M']$ においても $\mathfrak{E}$ は確実に存在している，いいかえると $\mathfrak{E}$ に属する量は値１をもつ，このことは，この節のはじめでみたように，

$$EU=U,$$

すなわち，Uf がつねに $\mathfrak{M}$ にあるということを意味する．ここで $\mathfrak{M}$ は $Ef=f$ であるすべての f の集合，つまり Eに属する閉じた線型多様体である．

$EU=U$ のかわりに

$$UE=U,\ U(1-E)=0$$

とかくこともできる．すなわちすべての $g=(1-E)f$，つまり $1-E$ に属する閉じた線型多様体に属するすべての g，すなわち $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ のすべての g に対して $Ug=0$ である．したがって，Uf は $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ のすべての f に対して 0 に等しく，$\mathfrak{M}$ に属する f に対してはまた $\mathfrak{M}$ のなかにおちる．このような方法では，U についてこれ以上のことを主張することはできない．

これが U を決定するのは（本質的に，すなわち定数因子を除いて），$\mathfrak{M}$ が 0 あるいは 1 次元であるとき，しかもそのときに限る．実際に；$\mathfrak{M}=[0]$ のときは，$U=0$ がえられるが，これは IV. 2., 注意 1. によって不可能である；$\mathfrak{M}=[\varphi]$ （$\varphi \neq 0$，したがって $\|\varphi\|=1$ と仮定してもよい）のときは $U\varphi=c\varphi$，したがって一般に

$$Uf=UEf=cEf,\ U=cE=cP_{[\varphi]}$$

であり，$c>0$ であるから（なぜなら U は定符号で $\neq 0$）U は本質的には $=E=P_{[\varphi]}$ である；2 次元以上の $\mathfrak{M}$ に対しては $\mathfrak{M}$ から 2 つの規化格された φ, ψ を直交するようにえらぶことができる．そうすると $P_{[\varphi]}$, $P_{[\psi]}$ はわれわれの条件をみたす 2 つの本質的に異った U である．したがって：$E=0$ は不可能，$E=P_{[\varphi]}(\|\varphi\|=1)$ に対しては $U=E=P_{[\varphi]}$，その他の場合には U は一意的でない．

$E=0$ に対してけっして U を見出すことができないということは，もし S がこのような性質 $\mathfrak{E}$ をもつことがありうるなら困った話であろう．しかしながらこれは η) によって除外されている：$\mathfrak{E}$ はけっして現われない，その確率はつねに 0 である．1 次元の $\mathfrak{M}$，すなわち $E=P_{[\varphi]}$ ($\|\varphi\|=1$) は U を一意的にしかも状態 φ として確定する——したがってこれは，もしそれが肯定的な結果を与えたときには S の状態を完全に，しかも φ として決定するような測定である[178]．他のすべての測定は不完全であり，状態の確定には十分では

178）すなわち，$\mathfrak{E}$ が存在するときは状態は φ である．それが存在しなければ，“非 $\mathfrak{E}$” が存在する．そのさいには $E=P_{[\varphi]}$，$\mathfrak{M}=[\varphi]$ のかわりに，$1-E=1-P_{[\varphi]}$，$\mathfrak{R}-\mathfrak{M}=\mathfrak{R}-[\varphi]$ がくるが，それは U を一意的に確定しない．（E はちょうど，“状態

ない.

一般の場合にはつぎのようなやり方で進む. $\mathfrak{E}$ に属する量も $\mathfrak{E}$ とよぶことにすると, U は, U_0 に属する集団 $([S_1, \cdots\cdots, S_N])$ に対して $\mathfrak{E}$ を測定し, そして値1がえられたすべての要素を集めて U の集団 $([S_1', \cdots\cdots, S_M'])$ とすることによって生ずる. さて $\mathfrak{E}$ の測定はいろいろ異った方法で行うことができる. たとえば, $\mathfrak{E}$ がそれの既知の函数になっているような他の量 $\mathfrak{R}[\mathfrak{E}=F(\mathfrak{R})]$ を測定してもよい. たとえば, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が $\mathfrak{M}$ を張る規格化された直交系であり, $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ がそれの $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ に対するものとすると, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は $\mathfrak{M}+(\mathfrak{R}-\mathfrak{M})=\mathfrak{R}$ を張る, すなわちそれは完全である. $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をおたがいに異った実数とし, 作用素 R を

$$R\left(\sum_n x_n\varphi_n+\sum_n x_n\psi_n\right)=\sum_n \lambda_n x_n\varphi_n+\sum_n \mu_n y_n\psi_n$$

によって定義する. R は明らかに純粋な点スペクトル $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をもち, それらにはそれぞれ固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots\psi_1, \psi_1, \cdots\cdots$ が属し, しかもすべての固有値は一重である. $F(x)$ を

$$F(\lambda_n)=1, \quad F(\mu_n)=0$$

であるような函数とすると, $F(R)$ は $\varphi_1, \varphi_2\cdots\cdots$ に対して, したがってまた $\mathfrak{M}$ のすべての f に対して, 固有値1をもち, $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ に対して, したがってまた $\mathfrak{R}-\mathfrak{M}$ のすべての f に対して固有値0をもつ——それゆえ $E=F(R)$ である. そのために, R が $\mathfrak{R}$ に属するならば $\mathfrak{E}=F(\mathfrak{R})$ である. したがって $\mathfrak{E}$ の測定は $\mathfrak{R}$ の測定とみなすことができる.

この場合にわれわれは, U_0, U がいかに関連しているかを計算することができる. $\mathfrak{R}$ の測定ののちに, 各系は状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ のうちの1つにある. しかもそれは, それぞれ値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ のうちどれが見出されたかにしたがって定まる. それに対する確率はそれぞれ,

---

は φ であるか?" という質問に対応する.) どんな結果になったときでも状態を一意的に確定する測定は, 作用素 R が1重の固有値しかもたない純粋な点スペクトルを有するような量 $\mathfrak{R}$ の測定である. III.3 をみよ. この場合には, 測定後に状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ (R の固有函数) のうちの1つが現われる. すなわち S の状態は一般に測定によって変化する. 同様に $\mathfrak{E}$ の測定も状態を変化させる. なぜならそのあとでは肯定的な結果がでた場合には $U=P_{[\varphi]}$ であり, それに反して否定的な場合には $U(1-P_{[\varphi]})=U$, $UP_{[\varphi]}=0$, すなわち $U\varphi=0$ である; ところが測定のまえには両者のうちのどちらでもなかったはずである. したがって, この量子力学的な状態 "調査" は, 状態を変化させてしまう. それ以外には考えようもないのである.

$$\mathrm{Spur}(U_0P_{[\varphi_1]})=(U_0\varphi_1,\ \varphi_1)$$
$$\mathrm{Spur}(U_0P_{[\varphi_2]})=(U_0\varphi_2,\ \varphi_2),\ \cdots\cdots,$$
$$\mathrm{Spur}(U_0P_{[\psi_1]})=(U_0\psi_1,\ \psi_1)$$
$$\mathrm{Spur}(U_0P_{[\psi_2]})=(U_0\psi_2,\ \psi_2),\ \cdots\cdots,$$

である (III.3. の考察をみよ，それの正当なことはすでに確めた). すなわち，U_0-集団のこれだけの割合がそれぞれ集団 $P_{[\varphi_1]}$, $P_{[\varphi_2]}$, ……, $P_{[\psi_1]}$, $P_{[\psi_2]}$, ……に移る. $\mathfrak{G}=1$ は $\mathfrak{R}=\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ に対応するから，U-集団は第1の群を一緒にしたものによって作られる. このようにして

$$U=\sum_n(U_0\varphi_n,\ \varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

である. ところで各 $P_{[\varphi_n]}$ はRと交換可能であるから[179]，U もそうでなければならない. すなわち：もし U がうえに述べた方法で作ったRのすべてと交換可能でないならば，いくつかの測定手続き（すなわち対応する $\mathfrak{R}$ にかんするもの）は U_0 から U を作るためには使えない. このときにはわれわれは，$\mathfrak{G}$ の観測によってえられるよりは多くのことを U について知っている. けれども U はちょうどわれわれの知識のこのような状態を表現するべきものであるから，この条件を確保するようにしよう：$\mathfrak{G}$ のいかなる測定手続きも除外する必要がないような U があるならば，それをえらぶことにする. したがって，このようなUがあるかどうか，そしてそれはいかなるものかを調べよう！

U は，うえに見たように，上述の方法で作られたすべての R と交換可能でなければならなかった. このことから

$$RU\varphi_n=UR\varphi_n=U(\lambda_n\varphi_n)=\lambda_nU\varphi_n,$$

すなわち $U\varphi_n$ はRの固有値 λ_n に属する固有函数——したがって

$$U\varphi_n=a_n\varphi_n$$

であることが示される. とくに $U\varphi_1=a_1\varphi_1$ である. $\mathfrak{M}$ に属するある1つのφで $\|\varphi\|=1$ のものが与えられたならば，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ を $\varphi_1=\varphi$ となるようにえらぶことができる. したがって $\mathfrak{M}$ に属するこのようなφはすべて U の固有函数である. そしてそれらのφはすべて同じ固有値に属する；というのは φ, ψ がもし異った固有値に属するならば，それらは直

179) たとえば，

$$RP_{[\varphi_n]}f=R((f,\varphi_n)\cdot\varphi_n)=(f,\varphi_n)\cdot R\varphi_n=\lambda_n(f,\varphi_n)\cdot\varphi_n,$$
$$P_{[\varphi_n]}Rf=(Rf,\varphi_n)\cdot\varphi_n=(f,R\varphi_n)\cdot\varphi_n=\lambda_n(f,\varphi_n)\cdot\varphi_n$$

であるから.

交するはずである．ところで $\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}}$ もまた固有函数であり，しかも

$$\left(\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}},\ \varphi\right)=\frac{(\varphi,\ \varphi)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \left(\frac{\varphi+\psi}{\sqrt{2}},\ \psi\right)=\frac{(\psi,\ \psi)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

のために φ, ψ のどちらにも直交しない——したがって，両者と同じ固有値に属することになる．しかし，φ と ψ は異なる固有値に属するとしたのであるから，それは不可能である．このようにして a を定数として

$$U\varphi=a\varphi$$

である．いうまでもなく $\|\varphi\|=1$ は落すことができるから，$\mathfrak{M}$ のすべての f に対して $Uf=af$ である．したがってつねに

$$UEg=aEg,\ \text{すなわち}\quad UE=aE,$$

ところが $U=UE$ であるから，

$$U=aE.$$

U, E は両方とも定符号で $\neq 0$ であるから $a>0$ である．したがって，それを本質的に変えることなしに，$U=E$ とおくことができる．

ところで，U_0 を適当に選ぶならば，あらゆる R に対して，すなわち，あらゆる系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ に対して提出された問題は，この U によって実際に解かれるのである．すなわち，$U_0=1$ ととると

$$\sum_n(U_0\varphi_n,\ \varphi_n)P_{[\varphi_n]}=\sum_n(\varphi_n,\ \varphi_n)P_{[\varphi_n]}=\sum_n P_{[\varphi_n]}=P_{\mathfrak{M}}=E=U$$

である．これによって，うえに描いた筋書の意味で，$U=E$ が基礎づけられたのである．また U_0 も，それが普遍的である，すなわち E および R に無関係であると仮定すれば，決定される．そのときには $U_0=1$ が，そしてそれだけが，望みどおりのものを与える．すなわちつぎのとおりである：

$$(U\varphi_m,\ \varphi_m)=(E\varphi_m,\ \varphi_m)=(\varphi_m,\ \varphi_m)=1,$$

$$\begin{aligned}(U\varphi_m,\ \varphi_m)&=\sum_n(U_0\varphi_n,\ \varphi_n)(P_{[\varphi_n]}\varphi_m,\ \varphi_m)\\&=\sum_n(U_0\varphi_n,\ \varphi_n)|(\varphi_n,\ \varphi_m)|^2=(U_0\varphi_m,\ \varphi_m),\end{aligned}$$

したがって：

$$(U_0\varphi_m,\ \varphi_m)=1.$$

$\|\varphi\|=1$ である $\mathfrak{M}$ の任意の φ を φ_1 とすることができるから，$(U_0\varphi,\ \varphi)=1$ であり，これから $\mathfrak{M}$ のすべての f に対して

$$(U_0f,\ f)=(f,\ f)$$

が結論される，$\mathfrak{M}$ は任意であるから，これはすべての f に対して一般に成り立つ．したがって $U_0=1$ である．

2つの必ずしも同時に確定できない性質 $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ が与えられたとする．そうすると，$\mathfrak{E}$ の存在をちょうど確めたばかりの系 S が，すぐ続いて行われる調査で性質 $\mathfrak{F}$ をも有するという確率はうえに述べたことから

$$\mathrm{Spur}(EF)=\sum(EF)$$

である（E, F は $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ の作用素；第1の式は $U=E$ であるから成り立ち，また，$E^2=E$, $F^2=F$ であるから，II. 11. によって第2が成り立つ）．なおこの確率は相対的である．このさい $\mathfrak{E}$ は固定して $\mathfrak{F}$ を変数と考えるべきである；もし $\mathrm{Spur}(E)=\sum(E)=\mathfrak{M}$ の次元数が有限であれば，この数で割ることによってそれを規格化することができる．

$\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ のかわりに物理量を考察することもできる：$\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_j$ を同時に測定可能な量とし，また $\mathfrak{S}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{S}_l$ も同様な量とする．またそれらの作用素をそれぞれ $R_1, \cdots\cdots, R_j$, $S_1, \cdots\cdots, S_l$ とし，それらの単位の分解をそれぞれ $E_1(\lambda)$, $\cdots\cdots, E_j(\lambda)$, $F_1(\lambda), \cdots\cdots, F_l(\lambda)$ とする．

$$I_1 : \lambda_1'<\lambda\leqq\lambda_1'', \cdots\cdots, I_j : \lambda_j'<\lambda\leqq\lambda_j'',$$
$$J_1 : \mu_1'<\lambda\leqq\mu_1'', \cdots\cdots, J_l : \mu_l'<\lambda\leqq\mu_l''$$

は区間であり，

$$E_1(I_1)=E_1(\lambda_1'')-E_1(\lambda_1'), \cdots\cdots, E_j(I_j)=E_j(\lambda_j'')-E_j(\lambda_j').$$
$$F_1(J_1)=F_1(\mu_1'')-F_1(\mu_1'), \cdots\cdots, F_l(J_l)=F_l(\mu_l'')-F(\mu_l')$$

とする．問題はつぎのとおり：S に対して $\mathfrak{R}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{R}_j$ を測定したらその値がそれぞれ $I_1, \cdots\cdots, I_j$ にあったとする．すぐ続いて行われる測定で $\mathfrak{S}_1, \cdots\cdots$, $\mathfrak{S}_l$ の値がそれぞれ $J_1, \cdots\cdots, J_l$ にあるだろうという確率はいかなるものであるか？ 明らかに

$$E=E_1(I_1)\cdots\cdots E_j(I_j), \quad F=F_1(J_1)\cdots\cdots F_l(J_l)$$

とおかなければならない（ε), ζ) をみよ）．そうすると求める確率は，

$$\mathrm{Spur}(E_1(I_1)\cdots\cdots E_j(I_j)\cdot F_1(J_1)\cdots\cdots F_l(J_l))$$
$$=\sum(E_1(I_1)\cdots\cdots E_j(I_j)\cdot F_1(J_1)\cdots\cdots F_l(J_l))$$

である．

最後になおもう一度，一般的な，出発点となる集団 $U_0=1$ の意味に言及しておこう．われわれは，$\mathfrak{R}$ の測定によりその集団を2つの部分に分割することによって，それから U を求めた．かりに $\mathfrak{R}$ の観測を行ったときそれを分

割しなかった，つまり，それの要素のすべてに $\mathfrak{R}$ の観測を行い，そしてそれらをすべてもう一度1つの集団に総合したとしたら，ふたたび $U_0=1$ がえられるであろう．これは直接にたやすく計算できるし，また $E=1$ とえらぶことによっても証明される：$E=1$ とおくと $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ および $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は落ちて，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ および $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が完全系を作る．したがって，全集団は変わらないから，$\mathfrak{R}$ の観測は個々の要素を変化させることはあるけれども，これらの変化のすべては精確に相殺し合わなければならない．なぜならば，もしすべての規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に対して

$$U_0=\sum_{n=1}^{\infty}(U_0\varphi_n, \varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

であれば，U_0 は各 $P_{[\varphi_n]}$ と交換可能であるから $P_{[\varphi_1]}$ と交換可能である——すなわち U_0 はすべての $P_{[\varphi]}(\|\varphi\|=1)$ と交換可能である．したがって

$$U_0\varphi=U_0P_{[\varphi]}\varphi=P_{[\varphi]}U_0\varphi=(U_0\varphi, \varphi)\varphi$$

であり，すなわち φ は U_0 の固有函数である．まえに，対応する関係 $U=E$ ($\mathfrak{N}$, 1 のかわりに $\mathfrak{M}$, E) から $U_0=1$ を導いたが，それと全く同様にして，このことから $U_0=1$ が結論される．

したがって，$U_0=1$ においてはすべての可能な状態が可能なかぎり高度な平衡にあり，どんな測定の干渉もそれを変えることができないのである．任意の規格化された完全直交系に対して

$$U_0=1=\sum_{n=1}^{\infty}=P_{[\varphi_n]}$$

である．いいかえるとそれはすべての状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を $1:1:\cdots\cdots$ に混ぜた混合である．このことから，$U_0=1$ が古い量子論で用いられた"すべての単一な量子軌道が等しい事前確率をもつ"という熱力学的仮定に対応していることがわかる．次章で展開するわれわれの熱力学的考察においてもそれは重要な役割を演ずるであろう．

V. 一般的考察

1. 測定と可逆性

統計作用素 U をもつ1つの混合において，作用素 R をもつ量 $\mathfrak{R}$ の測定をおこなえば（すなわち，この集団の各要素に対して測定をおこなってから，その各々の系すべてをふたたび集めて1つの集団とするのである）どうなるかということは，この問いがとにかく一意的な答えを許すものであるかぎり，予言することができる．

まず，R が純粋の単純な点スペクトルをもつとしよう．$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を固有函数から作った規格化された完全直交系，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ をそれに対応する固有値（仮定により，すべてたがいに異っている）とする．測定ののちの事態は，つぎのようである：はじめの集団のうち $(U\varphi_n, \varphi_n)$ だけの部分における $\mathfrak{R}$ の値は λ_n である $(n=1, 2, \cdots\cdots)$. それゆえ，この部分は，$\mathfrak{R}$ が確実に λ_n という値をもち（IV. 3. の **M.**），したがって状態 φ_n にある，（正しく規格化された）統計作用素 $P_{[\varphi_n]}$ をもつ集団である．したがって，それらを合わせることによって，統計作用素

$$U' = \sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n,\ \varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

をもつ混合が生ずる．

第2に，R は純粋の点スペクトルをもつけれども——したがって，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ および $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ の意味はまえと同じである——しかしけっして単純ではない，すなわち λ_n のうち等しいものがあるとする．そのとき $\mathfrak{R}$ の測定は一義的に定めることができない（例えば IV. 3. の $\mathfrak{S}$ においてそうであったように）．事実，$\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をすべてたがいに異なる実数，S は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ および $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ に対応する作用素で，それに属する量を $\mathfrak{S}$ とすると，$F(x)$ が

$$F(\mu_n) = \lambda_n \qquad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

となるような函数であれば，

$$F(S) = R.$$

ゆえに

$$F(\mathfrak{S})=\mathfrak{R}$$

である．したがって，$\mathfrak{S}$ の測定はまた $\mathfrak{R}$ の測定とみなすこともできる．そうすると，この測定は U をうえに与えた U' へ変化させる．この U' は，（まったく任意な）$\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ にはぜんぜん依存しないが，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ には依存する——しかもこれらの函数は R の固有値の多重性のために一意的には決まらないのである．IV. 3. でわれわれは，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ について述べることのできることを，II. 8. の議論にしたがって与えておいた．すなわち，$\lambda', \lambda'', \cdots\cdots$ を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ のうち異なるものとし，$Rf=\lambda' f$，あるいは $Rf=\lambda'' f$，あるいは……をみたす f の集合をそれぞれ $\mathfrak{M}_{\lambda'}, \mathfrak{M}_{\lambda''}, \cdots\cdots$ とする．そうして，$\chi_1', \chi_2', \cdots\cdots$ あるいは $\chi_1'', \chi_2'', \cdots\cdots$，あるいは …… は，それぞれ $\mathfrak{M}_{\lambda'}$, $\mathfrak{M}_{\lambda''}, \cdots\cdots$ を張る任意の規格化直交系とすれば，$\chi_1', \chi_2', \cdots\cdots, \chi_1'', \chi_2'', \cdots\cdots$ はもっとも一般的な $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ 系である．したがって，U' としては，$\mathfrak{S}$ の選び方，すなわちそれに固有の測定の仕方にしたがって，あらゆる

$$U'=\sum_n (U\chi_n', \chi_n')P_{[\chi_n']}+\sum_n (U\chi_n'', \chi_n'')P_{[\chi_n'']}+\cdots\cdots$$

が問題となるのである．そして，これが一意的なのは特別の場合だけにすぎない．

なお，この特別な場合を決定しておこう．そのようなときには，和の各項が一意的でなければならない．すなわち，固有値 λ のすべてについて，$\mathfrak{M}_\lambda$ が $Rf=\lambda f$ をみたす f の集合であるかぎり，

$$\sum_n (U\chi_n, \chi_n)P_{[\chi_n]}$$

が，$\mathfrak{M}_\lambda$ を張る規格化直交系のいかんにかかわらず同一でなければならない．この和を V となづけるならば，IV. 3. での考察を言葉どうりにくり返すことによって（そのさい，あそこでの $U_0, U, \mathfrak{M}$ は $U, V, \mathfrak{M}_\lambda$ でおきかえられる）

$$V=c_\lambda P_{\mathfrak{M}_\lambda} \qquad (c_\lambda \text{ は定数で } >0)$$

でなければならないことが示される．これは，$\mathfrak{M}_\lambda$ に属するすべての f に対して

$$(Uf, f)=c_\lambda(f, f)$$

が成り立つことと同等である．この f は，すべての g をとってきて $P_{\mathfrak{M}_\lambda}g$ としたものと同じであるから，要求されるのは，R のすべての固有値 λ に対して

$$(UP_{\mathfrak{M}_\lambda}g, P_{\mathfrak{M}_\lambda}g)=c_\lambda(P_{\mathfrak{M}_\lambda}g, P_{\mathfrak{M}_\lambda}g),$$

すなわち，

$$(P_{\mathfrak{M}_\lambda} U P_{\mathfrak{M}_\lambda} g,\ g) = c_\lambda (P_{\mathfrak{M}_\lambda} g,\ g),$$

すなわち，

$$P_{\mathfrak{M}_\lambda} U P_{\mathfrak{M}_\lambda} = c_\lambda P_{\mathfrak{M}_\lambda}$$

となることである．しかし，U をきびしく制約することの明らかなこの条件がみたされないならば，$\mathfrak{R}$ に対する異なる測定の仕方は実際に U を異なる U' へ変化させる（それでも，V. 4. では熱力学的な基礎にたって，一般的な $\mathfrak{R}$ の測定の結果について，なおいくらか述べることができるであろう）．

第3に，R はぜんぜん点スペクトルをもたないとする．そうすると，III. 3.（あるいは IV. 3. の規準 1）によって絶対的に精確な測定はけっしてできないが，限られた精度での $\mathfrak{R}$ の測定は，さきに論じたように，純粋な点スペクトルをもった量の測定と同等である．

物質系に対するもう1つの種類の交渉の仕方は，不連続で非因果的な，瞬間的に作用する実験または測定と反対に，時間に依存する Schrödinger の微分方程式によって与えられる．この方程式は，系の全エネルギーが知れているとき，それが時間の経過とともに連続かつ因果的にどのような変化をするかを記述する．状態 φ に対する方程式は，H をエネルギー作用素としたとき

$$(\mathbf{Z}_1.) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varphi_t = -\frac{2\pi i}{h}\mathsf{H}\varphi_t.$$

状態 φ_t の統計作用素 $U_t = P_{[\varphi_t]}$ に対して，この方程式から

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}U_t\right)f &= \frac{\partial}{\partial t}(U_t f) = \frac{\partial}{\partial t}((f,\ \varphi_t)\cdot\varphi_t)\\ &= \left(f\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\right)\cdot\varphi_t + (f,\ \varphi_t)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t\\ &= -\left(f,\ \frac{2\pi i}{h}\mathsf{H}\varphi_t\right)\varphi_t - (f,\ \varphi_t)\frac{2\pi i}{h}\mathsf{H}\varphi_t\\ &= \frac{2\pi i}{h}((\mathsf{H}f,\ \varphi_t)\varphi_t - (f,\ \varphi_t)\cdot\mathsf{H}\varphi_t) = \frac{2\pi i}{h}(U_t\mathsf{H} - \mathsf{H}U_t)f.\end{aligned}$$

$$(\mathbf{Z}_2.) \qquad \frac{\partial}{\partial t}U_t = \frac{2\pi i}{h}(U_t\mathsf{H} - \mathsf{H}U_t).$$

さて，U_t がある一つの状態でなく，それぞれの重み $w_1, w_2, \cdots\cdots$ をもつ多くの状態 $P_{[\varphi_t^{(1)}]}$, $P_{[\varphi_t^{(2)}]}$, …… の混合である場合には，その変化のようすは $P_{[\varphi_t^{(1)}]}$, $P_{[\varphi_t^{(2)}]}$, …… の変化から導かれなければならない——それぞれに対応する方程式 $\mathbf{Z}_2.$ を加えあわせることによって，この U_t に対しても $\mathbf{Z}_2.$ が成り

立つことがわかる．ところで，すべての U はそのような混合であるか，またはその極限の場合である（例えば，Spur U が有限な U はいずれもそのような混合である）から，$\boldsymbol{Z_2}$. が一般的に成り立つことを要求することができる．

$\boldsymbol{Z_2}$. においても，Schrödinger の微分方程式 $\boldsymbol{Z_1}$. におけるのと同様，H もまた t に依存していてよい——しかし，そうでない場合には，解をあらわな形に書くことができる．実際，$\boldsymbol{Z_1}$. に対してはすでに知っているように，

$$(\boldsymbol{Z_1'}.)\qquad \varphi_t = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\cdot \mathsf{H}}\varphi_0,$$

また $\boldsymbol{Z_2}$. に対しては

$$(\boldsymbol{Z_2'}.)\qquad U_t = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\cdot \mathsf{H}}U_0 e^{\frac{2\pi i}{h}t\cdot \mathsf{H}}$$

である（これらが解であり，またたがいに他から導かれるということは，容易に証明される．与えられた初期値 φ_0 および U_0 のもとでは，それだけが解であることは明らかである：微分方程式 $\boldsymbol{Z_1}$.，$\boldsymbol{Z_2}$. は，t について1階なのだから）．

こうして，系 $\boldsymbol{S}$ または集団 $[\boldsymbol{S_1}, \cdots\cdots, \boldsymbol{S_N}]$ に対しておこなうことのできる交渉として，根本的に異なる2種類のものがえられた．第1は測定による任意的な変化であって，公式

$$(\mathit{1}.)\qquad U \to U' = \sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n\cdot\varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

に再現されている（$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ に規格化された完全直交系，うえをみよ）．第2は時間の経過にともなう自動的な変化で，公式

$$(\mathit{2}.)\qquad U \to U_t = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\cdot \mathsf{H}}Ue^{\frac{2\pi i}{h}t\cdot \mathsf{H}}$$

に再現されている（H はエネルギー作用素，t は時間；H は t に依存しない）．H が t に依存しておれば，考えている時間間隔を，H が変化しないか，ごくわずかしか変化しないくらいの小さな区間にわけて，その各々に *2.* を適用する．それを重ね合わせて目的の結果がえられる．

そこでつぎに，これら2種の交渉の仕方について，その性質とそれら相互の関係とに綿密に対決しなければならない．

まず第1に奇異の感をいだかされるのはつぎのことである．*2.* において H は時間に依存することが許される（そこに述べたような仕方で）から，測定による交渉を記述するには，*2.* だけですでに十分である，と信じたとしてもそれはもっともである：物理的な交渉とは，考察している系に一時的にエネルギ

一的な結合をそう入すること，すなわち，適当な（観測者が指定した）時間に依存する H を導入することにほかならないからである．だとすれば，なぜ測定に対して特別の過程 *1.* を必要とするのであろうか？その理由はこうである：測定のさい系 S それ自身だけを考察するということはできない．むしろ，それと測定装置 M との相互作用を計算によって追求できるためには，系 $S+M$ を調べなければならないのである．測定の理論は $S+M$ にかんする命題である．しかもそれは，S の状態が M の状態のある性質（すなわち，観測者が読みとる指針の位置）とどのように関係しているかを与えなければならない．観測者を M のなかにかぞえいれて，S の状態と M の指針の位置との関係のかわりに，かれの目，それどころか脳における化学変化（すなわち，かれが“見た”，あるいは“知覚した”ところのもの）との関係を問題にするかどうかということは，もとよりほとんどどうでもよいことである．このことは IV. 1. でさらに厳密に研究する．いずれにしても，*2.* を適用できるのは $S+M$ に対してだけである．もちろん，その結果が S については，*1.* を直接適用したのと同じ結果を与えることを示さなければならない．これが成功してはじめて，物理学的世界を量子力学的な基礎にたって考察する統一的な方法がえられたことになる．この問題の考察は VI. 3. までのばす．

第2に，*1.* について注意すべきは，*1.* の意味での測定は，瞬間的でなければならないほどの短い時間のあいだに，おこなわれなければならないことが，再三指摘されたということである（変化した U_t を *2.* によって計算して，これを正そうとしても，何もえられないであろう：なぜなら，なんらかの U_t を適用しようとすれば，測定の瞬間 t も正確に知らなければならない——すなわち，測定の時間はうんと短くなければならないからである）．ところで古典力学において時間と正準共役な関係にある量が存在しており，それはエネルギーであるから[180]，いまのことは原理的な関心をひく．いまのことから，正準共役な時間・エネルギーの対についても，デカルト座標と運動量との対についてと同様の不確定関係が成り立つと期待されるのである[180]．また，特殊相対性理論も広汎な類似の成り立つべきことを示している：3つの空間座標と時間とは，3つの空間的運動量とエネルギーと同じく“4 元ベクトル”をつくる．そのような不確定関係は，非常に精確なエネルギーの測定を非常に短い時間のあい

180） すべての（Hamilton 的な）古典力学の教科書に，この関係が与えられている．

だにおこなうことはできなくて，測定誤差εと測定時間の長さτとに対して

$$\varepsilon\tau \sim h$$

という形の関係を期待すべきである，ということを意味するであろう．III. 4. でp, qに対しておこなったのと同様の物理的な議論によって，実際そのような結果が導かれる[181]．ここではこまかいことに立ちいらないで，光量子の場合を引用するだけにしよう：それのエネルギーの確定度εは，Bohr の振動数条件によって，振動数の確定度のh倍，$h\Delta\nu$に等しい；しかるに，注 137）で論じたように$\Delta\nu$はたかだか時間の長さの逆数$\frac{1}{\tau}$であるから，

$$\varepsilon \gtrsim \frac{h}{\tau}.$$

そして，光量子の単色性を全時間間隔τにわたって確立するためには，測定はこの時間間隔全体にひろがっていなければならない．しかし，光量子の場合で特徴はつくされる．というのは，ふつう原子のエネルギー準位は対応するスペクトル線の振動数から決定されるからである．ところで，エネルギーがそのようであるとすれば，他の量$\mathfrak{R}$においても，測定の精度と時間とのあいだに関係がありうる．とすれば瞬間的な測定というわれわれの仮定は，いかにして正当化されるであろうか?

なによりも，この異議は，量子力学の本質的な弱点に向けられていることを認めなければならない．それは，まさに量子力学の主要な弱点であるところの，時間tを3つの空間座標x, y, zからとくに区別し，客観的な同時刻概念を前提しているという非相対論的な性格である．実際，他のすべての量（とりわけ，ローレンツ変換によってtと密接に結びつけられているx, y, z）は作用素によって表現されるのに反して，時間には，古典力学と同じく，通常の数であるパラメーターが対応している．あるいは，2個の粒子からなる系は，粒子の$2\times3=6$個の空間座標とただ1つの時間tとだけに依存する波動函数をもっているが，実際は，ローレンツ変換の要請からすれば2つの時間が望ましいのである．したがって，自然法則からきまる測定の最小の時間を無視することができるということと，量子力学のこのような非相対論的性格とを関係づけることもできよう．それは1つの説明ではあるが，しかし喜ばしいことではない！

181） 時間・エネルギーの対についての不確定関係はしばしば議論された．Heisenberg: *Die Physikalische Prinzipien der Quantenmechanik*（玉木英彦ほか訳：量子論の物理的基礎，1954 みすず書房）の総括的な叙述を参照．

もっとも，より厳密に問題を調べてみると，事情はそれほど悪くはないことがわかる．というのは，実際にわれわれが必要とするのは t が小さいことではなく，確率$(U\varphi_n, \varphi_n)$ の計算において――したがって

$$U'=\sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n, \varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

を作るときに――出発点として U それ自身をとっても $U_t=e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}Ue^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}$ をとっても，たいした違いを生じないということだからである．ところで，

$$(U_t\varphi_n, \varphi_n)=(e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}Ue^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi_n, \varphi_n)$$

$$=(Ue^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi_n, e^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi_n)$$

のおかげで，いまのことを達成するには，適当な摂動エネルギーをいれて H を変更し，$e^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi_n$ が φ_n と絶対値１の定数因子だけしか異らないようにすればよい．すなわち，状態 φ_n は **2.** の影響のもとで一定，すなわち定常状態である；あるいは，$\mathrm{H}\varphi_n$ は φ_n に実定数をかけたものである，すなわち，φ_n は H の固有函数である．ちょっとみると，R の固有函数を定常状態に，したがって H の固有函数になおすようなエネルギー作用素 H の変更（すなわち，R, H は変換可能となる）はなっとくできないようにみえる．しかし実際はそうでなく，典型的な測定装置は H へのまさにこのような影響をめざしているのだということが明らかにされる．

実際，すべての測定は，あるエネルギーをもった光量子または質点がある方向に飛んできて，それの特徴，すなわち，それの運動量によって測定結果を与えることによって終る；あるいは，ある質点（例えば目盛りのうえの指針）が静止して，そのデカルト座標が測定結果を与えることによって終る．したがって，光量子の場合には，III. 6. での用語を使って，どの M_n が $=1$ であるか，(ほかは $=0$)，すなわちすべての M_1, M_2, …… の値の所与が測定すべき量と同等である；進行する質点の場合には，その３つの運動量成分 P^x, P^y, P^z を与えることであり，静止している質点の場合は，その３つのデカルト座標 x, y, z あるいはそれの作用素をとって Q^x, Q^y, Q^z を与えることである．ところで，測定が現実に完遂されるのは，光量子あるいは質点が現実に“まっすぐ”進む，すなわち，光量子なら吸収を受けず，質点ならポテンシャルエネルギーによって進路を曲げられない場合だけである．または静止した質点が現

実に静止している——それには大きな質量が必要とされる——場合だけである[182]．（最後のことは，不確定関係からも必要である．速度が0に近くなければならないから，その分散は小さいが，他方それと質量との積，運動量は，座標の分散が小さいために強く分散していなければならないからである．実際，指針は巨視的な物体であり，巨大である）．さて，エネルギー作用素 H は，光量子に対しては III, 6. によって

$$\sum_{n=1}^{\infty} h\rho_n \cdot M_n + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{kj}{}^n \left(\sqrt{M_n+1} \cdot \begin{pmatrix} k \to j \\ M_n \to M_n+1 \end{pmatrix} + \sqrt{M_n} \cdot \begin{pmatrix} k \to j \\ M_n \to M_n-1 \end{pmatrix} \right);$$

他方，2個の質点の場合は

$$\frac{(P^x)^2+(P^y)^2+(P^z)^2}{2m} + V(Q^x,\ Q^y,\ Q^z)$$

である（m は質量，V はポテンシャルエネルギー）．われわれの基準はこうなる：$w_{kj}{}^n$ は消えるべきである，あるいは，V は定数でなければならない．あるいは，m は非常に大でなければならない．ところが，まさしくこれらのことによって，M_n，あるいは P^x, P^y, P^z あるいは Q^x, Q^y, Q^z はうえに与えた H と交換可能になる．

これらの議論を終えるにあたって，なおつぎのことにふれておこう．元来興味のある状態（こゝでは φ_1, φ_2, ……）を定常状態にするということは，理論物理学においてそのほかの場合においても役に立っている．物理化学の“思考実験”においてしばしば避けることのできない，化学反応の中断（“毒化”）の可能性の仮定もこのような性質のものである[183]．

2つの交渉の仕方 *1.* と *2.* とは，たがいに根本的に異っている．どちらも形のうえでは一意的，すなわち因果的であるということは本質的でない；なぜなら，われわれは混合の統計的性質を考察しているのだから，すべての変化は，それが統計的である場合にも，確率と期待値との因果的な変化をひきおこすということは，意外なことではないからである．このような理由から，統計的集団と確率とを導入するのである！ 重要なのはそのことではなくて，*2.* は U の

182） 測定装置の他のすべてのこまかい点が目的とするのは，単に，元来興味のある量 $\mathfrak{R}$ あるいはその作用素Rを，ここにあげた M_n や P^x, P^y, P^z，あるいは Q^x, Q^y, Q^z と結合させることである．もちろん，まさにこの点が測定技術の実際的に重要な面なのであるが．

183） 例えば，Nernst：*Theoretische Chemie*, Stuttgart（1893 年以来数多くの版がある）Buch IV. “質量作用の法則”の熱力学的証明にかんする議論を参照．

なかにある統計的な不確かさを高めないのに，**1.** は高めるということである：**2.** は，状態を状態へ移す．

$$(P_{[\varphi]} \text{ を } P_{[e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi]} \text{ へ}),$$

他方 **1.** は，状態を混合へ移すことがおおいに可能である．したがってこの意味では，**1.** にしたがう状態の発展は統計的であり，**2.** にしたがうものは因果的である．

さらに **2.** は，固定した H と t とに対しては，すべての U の単なるユニタリー変換である：

$$U_t = AUA^{-1},\ \ A = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}} \text{ はユニタリー．}$$

すなわち，$Uf = g$ は $U_t(Af) = Ag$ を意味するから，U_t は U からヒルベルト空間のユニタリー変換Aによって，したがって，すべての幾何学的な基礎概念を不変にするところの同型写像によって生ずる（I.4 で説明した諸原理を参照）．それゆえ，可逆的である：それには A を A^{-1} でおきかえればよいが，A, A^{-1} は，H, t の選び方にある大きな任意性のために，まったく任意のユニタリー作用素とみなしうるから，そのようなおきかえは可能である．したがって，古典力学と同じく，**2.** もまた，現実の世界のもっとも本質的で著しい性質，すなわち，その不可逆性，あるいは時間方向の“未来”と“過去”の根本的な違いを再現していない．

1. の方は原理的に異ったふるまいを示す：

$$U \to U' = \sum_{n=1}^{\infty} (U\varphi_n,\ \varphi_n) P_{[\varphi_n]}$$

という移行は簡単に逆行さすべくもない．それは要するに不可逆であることがただちにわかる．その意味は，一般に与えられた U' から出発して，過程 **1.** あるいは **2.** をくり返し適用することによってそれに対応する U へもどることはけっして成功しない，ということである．こうして，われわれは，熱力学的な考察に従事すべき動機が与えられる点にまで到達した．可逆性の問題は明らかに **1.** と **2.** との違いにかかわるものであるが，熱力学的考察だけが，この違いを正しく理解することを可能ならしめるからである．

2. 熱 力 学 的 考 察

量子力学的集団の熱力学を，2つの異った観点から研究しよう．最初は，熱

力学の2つの主法則が成り立つこと，すなわち第1種および第2種の永久運動の不可能なこと（エネルギーの法則とエントロピーの法則）[184]を仮定し，各集団に対するエントロピーをそれから計算する．そのさい現象論的熱力学の通常の方法が適用される．量子力学が登場するのは，量子力学の法則によってそのふるまいが規制されるような対象（われわれの集団ならびにその統計作用素U）にわれわれの熱力学的考察がかかわりあう，という限りにおいてだけである．2つの主法則の正しいことは仮定されるのであって，証明されるのではない．そのあとで，われわれは量子力学において主法則が成立することを証明するだろう．エネルギーの法則はもともと成り立っているのだから，エントロピーの法則だけが問題となる．すなわち，われわれがそこで示そうとするのは，交渉 ***1. 2.*** が最初の方法で計算されたエントロピーをけっして減少させない，ということである．この順序は，いささか不自然に思われるかもしれない．けれども現象論的熱力学の議論によって始めて，第2の種類の考察に要求されるような，この問題についての見通しがえられる，ということから，それは理由づけられる．

それゆえ現象論的な考察から始める．なおそれはまた古典力学のよく知られたパラドックスを解消させることを許すだろう．ここで早速つぎのことを注意しておきたい．それはわれわれの「思考実験」の空想的な性格，すなわちそれが実際には行えないことは，なんらその証明力を損ずるものではないということである：現象論的熱力学の意味では，考えられるどんな過程も，それが主法則に矛盾しなければ，すべて証明能力をもつのである．

目標は，統計作用素 U をもつ集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ のエントロピーを決定することである．ただし U は正しく規格化されている，すなわち Spur $U=1$ と仮定する．古典統計力学の言葉を使っていうと，われわれはここでギブス集団を扱わなければならないのである：すなわち，統計および熱力学は，多くの（不完全にしか知られない）自由度をもつ唯1個の非常に複雑な力学系の，（相互作用をしている）構成部分を問題にするものではなく[185]，それらが取扱うの

184) この基礎のうえに作られた，熱力学の現象論的な体系は数多くの教科書に見出される．たとえば，Planck: *Vorlesungen über Thermodynamik*, Berlin 1930（芝亀吉訳「熱力学」岩波書店 1938)．これから述べることに対しては，おもに主法則の統計的な把握が問題になる．それはたとえばつぎのような論文に述べられている： Einstein: *Verh. d. dtsch, Physik. Ges.* Bd. 12 (1914); L. Szilárd: Z. Physik Bd. 32 (1925).

185) これは統計力学の Maxwell-Boltzmann 流の方法である（P. および T. Ehren-

は，非常に多くの力学系からなる１つの集団なのである．ただしそれらの力学系の各々はそれ自身すでに限りなく大きい自由度をもつことができ（もたなくともよいが），そしてそれらの力学系はおたがいに完全に分離し相互作用がないものとする[186]．系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$，が完全に分離していること，およびそれらに対して通常の確率計算の数え方を適用したいという事実からして，明らかに普通の統計が用いられるべきである．識別不可能な相互作用をしている粒子からなるある種の集団の場合に（すなわち光量子あるいは電子，陽子の場合，III. 6. とりわけ注 147）をみよ）適用される，通常のものとは異った Bose-Einstein および Fermi-Dirac の数え方は，ここでは問題にしなくてよい．

このような集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ を，熱力学的に取扱うために Einstein が導入した方法は，つぎの通りである[187]：各系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ をそれぞれ１つずつ箱 $K_1, \cdots\cdots, K_N$ のなかに閉じこめる．これらの箱の壁はあらゆる作用を伝えないものとする．——このことはこれらの系のあいだに相互作用がないから許される．さらに，$S_1, \cdots\cdots, S_N$ に起りうる状態変化（したがってエネルギーの，それゆえ質量の変化）が箱の質量にごくわずかしか影響しないように，箱はすべて非常に大きな質量をもつとしよう．またこのために，以下で行われる思考実験において，箱の速度は，非相対論的に計算してもかまわないほど小さいであろう．つぎにこれらの箱 $K_1, \cdots\cdots, K_N$ を１つの非常に大きな箱 $\bar{K}$ のなかに入れる（すなわち $\bar{K}$ の容積Vは，$K_1, \cdots\cdots, K_N$ の容積の和よりもずっと大きくなければならない）．簡単のために $\bar{K}$ のなかには力の場はなにもないとする（したがって，とくにそれはすべての重力場から自由であり，また $K_1 \cdots\cdots K_N$ の質量が，なんら問題になる作用をもたないほど大きくなければならない）．したがってわれわれは $K_1, \cdots\cdots, K_N$（これらはそれぞれ $S_1, \cdots\cdots, S_N$ を含む）を，大きな箱のなかに閉じこめられた気体の分子とみなすことができる．いま $\bar{K}$ を温度 T の非常に大きな熱だめに接触させると，$\bar{K}$ の壁も同じくこの温度になり，そしてその（実在の）分子はそれに対応するブ

fest の論文に与えられた概観をみよ： Enzykl. d. Math. Wiss. Bd. Ⅱ. 4. D. Leipzig 1907）．たとえば気体運動論で，“非常に複雑な”系とは多くの（相互作用している）分子から成る気体であり，そして分子が統計的に研究される．

186） これは Gibbs の方法である（上掲の注 185）を参照）．この方法では個々の系は気体全体であり，同一の系（すなわち同一の気体）の多くの標本がたどる変化が追求されその性質が統計的に求められる．

187） さきの注 184）をみよ．さらに，同じものが L. Szilárd によってつくられた．

ラウン運動を始めるだろう．したがってそれらはすぐ近くにある $K_1, \cdots\cdots, K_N$ に運動量を移しあたえるであろう．それによってこれらは運動し始め，また残りの $K_1, \cdots\cdots, K_N$ に運動量をあたえるであろう．まもなくすべての $K_1, \cdots\cdots, K_N$ は運動状態になり，$\overline{K}$ の壁で壁の分子と，そしてまた（$\overline{K}$ の内部では）おたがいに運動量を交換するだろう．この運動の定常的な平衡状態は，$K_1, \cdots\cdots, K_N$ が壁の分子の（温度 $\mathbf{T}$ の）ブラウン運動と平衡にあるような速度分布をもつに到ったとき，いいかえると，$K_1, \cdots\cdots, K_N$ を“分子”とする気体の，温度 $\mathbf{T}$ におけるマクスウェル速度分布を，$K_1, \cdots\cdots, K_N$ がとるに到ったときに，はじめて到達されるであろう[188]．したがってこのときわれわれは，$[S_1, \cdots\cdots, S_N]$-気体が温度 $\mathbf{T}$ をもつに到ったということができる．なお簡単のために，以下では，統計作用素 U をもつ集団 $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ を U-集団とよび，$[S_1, \cdots\cdots, S_N]$-気体を U-気体とよぶことにする．

このような気体に考えをめぐらす理由はこうである．U-集団と V-集団（U, V は Spur 1 の定符号の作用素で，対応する集団は $[S_1, \cdots\cdots, S_N]$ および $[S_1', \cdots\cdots, S_N']$ とする）のエントロピーの差は，定義にしたがって，前者を可逆的に後者に変える操作によって決めなければならないが[189]，それは，U-および V-気体を考えるという廻り道によって，もっともうまく行われるからである．すなわち，われわれはつぎのように主張する：U-および V-集団のエントロピーの差は，U-および V-気体のそれとまったく同一である——たゞし両者は同じ温度 $\mathbf{T}$ で考えられなければならないが，それ以外は任意であってよい．$\mathbf{T}$ が非常に 0 に近ければ，あきらかにこのことは任意の精確さで成り立つ．なぜならば，温度 0 では U-気体の $K_1, \cdots\cdots, K_N$ はまったく自身の運動を行わず，静止した箱 $K_1, \cdots\cdots, K_N$, $\overline{K}$ が存在することは，熱力学的にはどうでもよいことになるために，U-集団と U-気体のあいだの差異が温度 0 ではなくなるからである（V についても同様）．したがって，与えられた $\mathbf{T}$ の変化のさい

188）よく知られているように気体運動論は，壁がそれによって閉じこめられている気体にその温度を移すときの過程をこのように記述している．上掲の注 184), 185) をみよ．

189）この変化のさいに，それぞれ温度 $\mathbf{T}_1, \cdots\cdots, \mathbf{T}_l$ において熱量 $\mathbf{Q}_1, \cdots\cdots, \mathbf{Q}_l$ が費されるとすると，エントロピーの差は

$$\frac{\mathbf{Q}_1}{\mathbf{T}_1} + \cdots\cdots + \frac{\mathbf{Q}_l}{\mathbf{T}_l}$$

に等しい．上掲の注 184) をみよ．

に，U-気体のエントロピーがちょうど V-気体のエントロピーと同じだけ変化するということを証明すれば，目的を達するわけである．$\mathbf{T}_1$ から $\mathbf{T}_2$ に熱したときの，ある1つの気体のエントロピー変化は，ただそれの熱的状態方程式，もっと正確にはそれの比熱にだけ依存する[190]．——われわれの場合におけるように，$\mathbf{T}_1$ を0に近くとらなければならないときには，ここで理想気体の仮定をおくことはむろん許されない[191]．そのかわり，2つの気体（U および V）が同じ状態方程式と同じ比熱をもつということは確かである．というのは気体運動論的には，箱 $K_1, \cdots\cdots, K_N$ がはばをきかし，それらにとじこめられている系 $S_1, \cdots\cdots, S_N$ および $S_1', \cdots\cdots, S_N'$ を，まったくおおいかくしてしまうからである．したがってこの温度をあげる過程では，U と V との違いは認められなくなり，2つのエントロピーの差は，うえに述べたように，一致するのである．それゆえ以後われわれは，U- および V-気体だけをおたがいに比較し，温度 $\mathbf{T}$ を十分高くとって，これらを理想気体とみなすことができるようにしよう[192]．これによってわれわれは，それらの気体運動論的なふるまいを完全におさえるのであり，したがって U-気体を可逆的に V-気体に移すという本来の課題に向うことができる．そのさい，いままで使ってきた過程とはちがって，$K_1, \cdots\cdots, K_N$ の内部にある $S_1, \cdots\cdots, S_N$ にも働きかけなければならない——つまりわれわれは箱 $K_1, \cdots\cdots, K_N$ を“開け”なければならない．——

まず最初に示すことは，すべての状態，$U=P_{[\varphi]}$ が同じエントロピーをもつこと，すなわち，熱エネルギーを消費あるいは放出することなく，$P_{[\varphi]}$-集団を $P_{[\psi]}$-集団に可逆的に移すことができる，ということである（$P_{[\varphi]}$ におけるエネルギーの期待値が $P_{[\psi]}$ におけるそれと異なるときには，もちろん，力学的エ

190） $c(\mathbf{T})$ がいま問題にしている気体の温度 $\mathbf{T}$ における比熱であれば，気体は温度差 $\mathbf{T}, \mathbf{T}+d\mathbf{T}$ のあいだに熱量 $c(\mathbf{T})d\mathbf{T}$ をうる．したがって注 189）によればエントロピーの差は

$$\int_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{T}_2} \frac{c(\mathbf{T})d\mathbf{T}}{\mathbf{T}}$$

である．

191） 理想気体に対しては $c(\mathbf{T})=$定数 であるが，実際には，非常に小さい $\mathbf{T}$ においてこれは確かに成り立たない．たとえば上掲の注 184）をみよ．

192） このためには $\overline{\mathbf{K}}$ の容積 V が，$\mathbf{K}_1, \cdots\cdots, \mathbf{K}_N$ の全容積に比べて大きいこと，さらに“1自由度あたりのエネルギー” $k\mathbf{T}$ （$k=$ボルツマン定数）が $h^2/\mu V^{2/3}$ （$h=$ Planck の定数，$\mu=1$個の分子の質量，この量は次元からみてエネルギーである）に比べて大きいことが要求される．たとえば Fermi: Z. Physik. Bd. **36** (1926) をみよ．

ネルギーが消費あるいは発生されなければならない). 注 184) をみよ. しかもそのためにはうえで考えた気体をとりあげる必要は一度もないであろう：この移行は温度 0 においても行うことができる. つまり, 集団それ自体でもって行うことができる. なお注意しておきたいのは, このことが証明されさえすれば, すべての状態がエントロピー 0 をもつように U-集団のエントロピーを規格化できるし, またそうするだろう, ということである.

なお, うえに述べた $P_{[\varphi]}$ から $P_{[\psi]}$ への移行は, なにも可逆的である必要はない. というのはもし可逆的でなければ, エントロピーの差は注 189) に与えた表式よりも大きいか等しい (上掲の注 185) をみよ). したがって $\geqq 0$ であるが, $P_{[\varphi]}$ と $P_{[\psi]}$ を交換すれば, 同様にそれが $\leqq 0$ であることがわかるから, したがってそれは $=0$ なのである.

もっともかんたんな手続きは, 時間を含む Schrödinger の微分方程式, すなわちわれわれの過程 *2* を用いて, ユニタリー作用素 $e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathsf{H}}$ が φ を ψ に移すようにすることであろう. それにはエネルギー作用素 H と t の数値を見つけなければならない. そうすると t 時間のうちに $P_{[\varphi]}$ は自然に $P_{[\psi]}$ に移行するであろう. そのうえにこの過程は可逆的であり, またそのさい熱はなんら問題にせずにすむ (V. 1. をみよ). しかしわれわれは, エネルギー作用素 H の可能な形について仮定をおくことをさけて, 過程 *1.* すなわち測定に類する交渉だけを用いることにしたい. 考えられる限りでもっとも簡単なのは, 集団 $P_{[\varphi]}$ に対してつぎのような量 $\mathfrak{R}$ を測定することであろう. $\mathfrak{R}$とは, それの作用素 R がまったく単純な固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots$ をもつ純粋な点スペクトルを有し, なおその固有函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ のうちにたとえば $\psi_1=\psi$ のように ψ が現われてくれるようなものである. なぜなら, 状態 φ はこの測定によって状態 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ の混合になるから, そのときになかんづく ψ も生ずるからである. それにもかかわらず, これは都合がよくない, というのは, $\psi_1=\psi$ はただ確率 $|(\varphi, \psi)|^2$ でもって生ずるだけで, $1-|(\varphi, \psi)|^2$ にあたる部分は他の状態に移るのであり, そればかりかたがいに直交する φ, ψ に対してはこれがすべてをしめるからである. しかしながらこれに似た手続きで目的は達せられる：われわれは, 多数のことなった測定をつぎつぎに行うことによって, $P_{[\varphi]}$ を $P_{[\psi]}$ から任意にわずかしかちがわないような集団に変えるであろう. すべてこれらの操作が可逆であること (あるいは少くともそうなりうること) は, うえで論じたように, 本質的ではない.

φ, ψ は直交すると仮定する．その理由は，もし直交しなければ，両者に直交する $\chi(\|\chi\|=1)$ をえらび；φ から χ へ，それから χ から ψ へ移ることができるからである．k は 1, 2, …… の値をとりうる数で，それについてはなおあとで定めるものとする．

$$\psi^{(\nu)}=\cos\frac{\pi\nu}{2k}\cdot\varphi+\sin\frac{\pi\nu}{2k}\cdot\psi \qquad (\nu=0,\ 1, \cdots\cdots, k)$$

とおく．あきらかに

$$\psi^{(0)}=\varphi,\quad \psi^{(k)}=\psi$$

であり，またつねに

$$\|\psi^{(\nu)}\|=1$$

である．各 $\psi^{(\nu)}$ $(\nu=1, \cdots\cdots, k)$ を，$\psi_1^{(\nu)}=\psi^{(\nu)}$ として，規格化された完全直交系 $\psi_1^{(\nu)}, \psi_2^{(\nu)}, \cdots\cdots$ に拡張する．純粋な点スペクトルおよびまったく異った固有値——それを $\lambda_1^{(\nu)}, \lambda_2^{(\nu)}, \cdots\cdots$ としよう——をもち，それぞれの固有函数が $\psi_1^{(\nu)}, \psi_2^{(\nu)}, \cdots\cdots$ であるような1つの作用素を $R^{(\nu)}$ とし，$\mathfrak{R}^{(\nu)}$ をそれに対応する量としよう．なお，

$$(\psi^{(\nu-1)},\ \psi^{(\nu)})=\cos\frac{\pi(\nu-1)}{2k}\cos\frac{\pi\nu}{2k}+\sin\frac{\pi(\nu-1)}{2k}\sin\frac{\pi\nu}{2k}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi\nu}{2k}-\frac{\pi(\nu-1)}{2k}\right)=\cos\frac{\pi}{2k}$$

であることを注意しておく．

いま $U^{(0)}=P_{[\psi^{(0)}]}=P_{[\varphi]}$ をもつ集団に，量 $\mathfrak{R}^{(1)}$ の測定を行う．それによってたとえば $U^{(1)}$ が生ずるとする．それから $U^{(1)}$ において量 $\mathfrak{R}^{(2)}$ が測られ $U^{(2)}$ が生じ，……，最後に $U^{(k-1)}$ に対し量 $\mathfrak{R}^{(k)}$ が測られ，$U^{(k)}$ が生ずるとする．十分に大きな k に対して $U^{(k)}$ が $P_{[\psi^{(k)}]}=P_{[\psi]}$ にいくらでも近くなるということは，直観的にはつぎのようにして明らかにすることができる：$\psi^{(\nu-1)}$ に $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ を測定すると，

$$|(\psi^{(\nu-1)},\ \psi^{(\nu)})|^2=\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^2$$

の部分は $\psi^{(\nu)}$ に移るから，つぎつぎに $\mathfrak{R}^{(1)}, \mathfrak{R}^{(2)}, \cdots\cdots, \mathfrak{R}^{(k)}$ を測定すると，少くとも $\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}$ の部分は $\psi^{(0)}=\varphi$ から $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \cdots\cdots, \psi^{(k-1)}$ を通って $\psi=\psi^{(k)}$ に移る．ところで，$k\to\infty$ のとき

$$\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}\to 1$$

であるから，k が十分に大きいならば，ほとんど ψ だけが生ずる．厳密な証明はつぎのとおりである：過程 *1.* はスプールを変えないから，

$$\mathrm{Spur}\, U^{(0)}=\mathrm{Spur}\, P_{[\varphi]}=1$$

のために

$$\mathrm{Spur}\, U^{(1)}=\mathrm{Spur}\, U^{(2)}=\cdots\cdots=\mathrm{Spur}\, U^{(k)}=1$$

である．他方

$$(U^{(\nu)}f,\ f)=\sum_n(U^{(\nu-1)}\psi_n^{(\nu)},\ \psi_n^{(\nu)})(P_{[\psi_n^{(\nu)}]}f,\ f)$$
$$=\sum_n(U^{(\nu-1)}\psi_n^{(\nu)},\ \psi_n^{(\nu)})|(\psi_n^{(\nu)},\ f)|^2$$

であり，したがって，

$$\nu=1,\cdots\cdots,k-1,\quad f=\psi_1^{(\nu+1)}=\psi^{(\nu+1)}$$

および

$$\nu=k,\quad f=\psi_1^{(k)}=\psi^{(k)}=\psi$$

に対して，それぞれ

$$(U^{(\nu)}\psi^{(\nu+1)},\ \psi^{(\nu+1)})\geqq(U^{(\nu-1)}\psi^{(\nu)},\ \psi^{(\nu)})|(\psi^{(\nu)},\ \psi^{(\nu+1)})|^2$$
$$=\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^2\cdot(U^{(\nu-1)}\psi^{(\nu)},\ \psi^{(\nu)}),$$
$$(U^{(k)}\psi^{(k)},\ \psi^{(k)})=(U^{(k-1)}\psi^{(k)},\ \psi^{(k)})$$

である．これは，

$$(U^{(0)}\psi^{(1)},\ \psi^{(1)})=(P_{[\psi^{(0)}]}\psi^{(1)},\ \psi^{(1)})=|(\psi^{(0)},\ \psi^{(1)})|^2=\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^2$$

と合せて，

$$(U^{(k)}\psi,\ \psi)\geqq\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}$$

をあたえる．

Spur $U^{(k)}=1$ および $k\to\infty$ に対して，$\left(\cos\frac{\pi}{2k}\right)^{2k}\to 1$ であるから，II. 11. にえられた結果を適用することができる：したがって $U^{(k)}$ は $P_{[\psi]}$ に収斂する．これでもって目的は達せられた．

つぎに論じなければならないのは，どの程度まで現象論的熱力学の“思考実験”における主要な補助手段，すなわちいわゆる半透壁を，量子力学的な系の場合にも使うことが許されるか，という問題である．

現象論的熱力学ではつぎの定理が成り立つ：I および II が同一の系の２つの異った状態であれば，I に対しては完全に透過的で，II に対してはまったく透過的でないような壁の存在を，仮定することが許される[193]――いわばこれが２つの状態の異っていること，したがってまた同一であることの熱力学的な定義である．さて量子力学においてこのような仮定は，どの程度まで許されるであろうか？

最初に明らかにすることは：$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ が１つの規格化された直交系であれば，状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ のどれか１つにある系 S を邪魔せずに通し，状態 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ のどれか１つにある系はそのまま反射するような半透壁がある．それに反して，他の状態にある系はこの壁と衝突するとき変化をうけることすらありうる．

この直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は完全である，と仮定することができる．というのはもしそうでなければ，$\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ をさらに加えることによって完全なものにすることができ，それらはたとえば $\varphi_1, \varphi_2 \cdots\cdots$ に算入すればよい．さて，純粋な点スペクトルとすべて単純な固有値，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ をもち，それらに属する固有函数がそれぞれ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ であるような，１つの作用素 R をえらぼう．しかも $\lambda_n<0$ および $\mu_n>0$ であるとしよう．Rには量 $\mathfrak{R}$ が属する．壁に，各々つぎのように作られた多くの窓を取りつける：われわれの気体の各分子 $K_1, \cdots\cdots, K_N$（われわれはふたたび温度 $\mathbf{T}>0$ における U-気体を考察している）はそこでつかまえられ，開けられて，それぞれそのなかに含まれている系 S_1，および ……，および S_N に対して，量 $\mathfrak{R}$ が測られる．それから箱はふたたび閉じられる．そして $\mathfrak{R}$ の測定値が <0 あるいは >0 であったかにしたがって，箱はその中身ごと，もとと同じ運動量をもって窓を通りぬけさせられるか，あるいは反射される．この装置が望みの目的をかなえてくれることは明らかであるが，ただ，このような衝突のあと，いかなる変化が装置に残留するのか，およびどこまでそれは熱力学のいわゆる“Maxwell の魔物”と共通しているのか，という問題を論ずることが残されている[194]．

第１の問題に対して述べるべきことは，$\mathfrak{R}$ の測定が場合によっては S の状

193）例えば，うえにあげた注 184）をみよ．

194）上掲の注 185）をみよ．“Maxwell の魔物”という考えに関連した困難の徹底的な議論は L. Szilárd：Z. Physik Bd. **53** (1929) に見られる．

態を，したがってまたそのエネルギーの期待値を変えることがあるから，この力学的エネルギーの差は，第1法則の意味で測定装置によって供給され，あるいは受取られなければならないということである(たとえば，ばねが備えつけられ，それがゆるめられたり，引張られたりすることによって). まったく自動的に動作する測定機構を問題にしており，また力学的エネルギー（熱エネルギーではなく!!）だけが交換されるのであるから，ここでは確かにどんなエントロピー変化も現われない．そしてこのことがいまわれわれにとって重要なすべてである(S が，状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ の1つにあれば，$\mathfrak{N}$ の測定は S をまったく変えないし，したがって測定器械にもそれを補償する変化は全然残らない.)

第2の点はより重大である．われわれの装置は“Maxwell の魔物”，すなわち，右からくる分子は通し左からくるものは反射するような半透壁に，かなりよく似ている．このような壁を気体の入っている容器の真中に挿入すると，まもなく気体は全部左側に見出される——すなわち体積がエントロピーの消費なしに半分になる．これは気体のエントロピーが補償されずに減少することを意味する．したがって，このような壁は第2法則にしたがえば存在することはできない．ところがわれわれの半透壁は，この熱力学的に許されない壁とまったく本質的に異っている：というのは，われわれの場合にはただ“分子” $K_1, \cdots\cdots, K_S$ の内部の性質（つまりそのなかに閉じこめられている S_1, あるいは，…… あるいは，S_N の状態）だけが考慮され，外部の性質（それが右からきたか左からきたか）にはふれられないからである．まさしくこのことが肝心なのである．この問題の立ち入った分析は，半透壁と“Maxwell の魔物”の本性および一般に“熱力学的系への知的存在の干渉”の役割を明らかにした L. Szilárd の研究にもとづいて行うことができる——ここではこれ以上この事柄に立ち入ることはできないが，その徹底的な議論はさきほどの注 194) によって知ることができるから，それも許されるであろう．

とくにうえの議論は，系 S の2つの状態 φ, ψ を，もしそれらが直交しておれば，半透壁によって確かに分離することができるということを示している．こんどはその逆，すなわち φ, ψ が直交しなければ，このような半透壁の仮定は第2法則と矛盾する，ということを証明しよう．いいかえると，半透壁によって分離することができるための必要かつ十分条件は

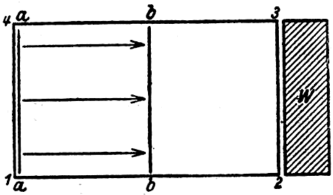
$$(\varphi, \psi)=0$$

であり，古典理論におけるように

$$\varphi \neq \psi$$

ではない（まえに用いた I, II の代りに φ, ψ と書く）. これによって，古典的な形式の熱力学につきまとう古くからのパラドックスが解明される，それは，半透壁を用いるときに現われる不愉快な不連続性である：任意にわずかしか異らない状態でも 100 パーセント分離可能であり，絶対的に同一な状態は決して分離できない！ こんどは連続的な移行をうる：なぜなら 100 パーセントの分離可能性は $(\varphi, \psi)=0$ のときにのみ現われ，(φ, ψ) が増大するにつれてその可能性はますますわるくなる．そして最大の (φ, ψ) のとき，すなわち $|(\varphi, \psi)|=1$ のときにのみ（もちろん $\|\varphi\|=\|\psi\|=1$ であり，したがって $|(\varphi, \psi)|=1$ から $\varphi=c\psi$, が導かれる，c は定数 $|c|=1$)，状態 φ, ψ は同一であり，すなわち分離はまったく不可能である．

うえで意図した考察を遂行するために，われわれはこの節の最終結果である U-集団のエントロピー値を，先廻りして用いなければならない．もちろんわれわれは，それを導くときには，ここでえた結果を使わない．



第 3 図

それゆえ，φ と ψ とを分離する半透壁があると仮定しよう．導き出すべきことは，

$$(\varphi, \psi)=0$$

である．われわれは

$$\frac{1}{2}(P_{[\varphi]}+P_{[\psi]})\text{-気体}$$

（すなわち状態 φ にある $\frac{N}{2}$ 個の系と状態 ψ の $\frac{N}{2}$ 個の系からなるもの，この作用素のスプールは1である）を考察する．また V（すなわち $\bar{K}$）および $\mathbf{T}$ を，それが理想気体であるように選ぶ．$\bar{K}$ は第 3 図に示された縦断面 *1 2 3 4 1* をもつとし，1方の端，aa に例の半透壁を挿入し，それからそれを中央，bb まで押し進める——そのさい他方の端，*2 3* にある温度 $\mathbf{T}$ の非常に大きな熱だめ $\boldsymbol{W}$ との接触によって気体の温度は一定に保たれなくてはならない．この過程において φ-分子には何事もおこらないが，ψ-分子は $\bar{K}$ の右半分に（bb と *2 3* のあいだに）押しやられる．すなわち，$\frac{1}{2}(P_{[\varphi]}+P_{[\psi]})$-気体 は，$P_{[\varphi]}$- および $P_{[\psi]}$-気体を 1:1 に混合したものである——前者には何事もおこらな

いが，後者は等温的に半分の体積に圧縮される．理想気体の状態方程式から，この過程において力学的仕事

$$-\frac{N}{2}\kappa\mathbf{T}\ln 2$$

がなされることがわかる $\left(\frac{N}{2}\right.$ は $P_{[\psi]}$-気体の分子の数，κ=Boltzmann の定数)[195]．そして気体のエネルギーは（等温変化のために）変化しないから[196]，この量のエネルギーは熱だめ $\boldsymbol{W}$ から受取られる．それゆえ熱だめのエントロピーの増加は

$$\frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{T}}=N\kappa\cdot\frac{1}{2}\ln 2$$

である（注 189）をみよ）．

この過程のあとでは，bb の左にはもとの $P_{[\varphi]}$-気体の半分，すなわち $\frac{N}{4}$ 個の分子が存在する；ところが bb の右側には，もとの $P_{[\varphi]}$-気体の半分，すなわち $\frac{N}{4}$ 個の分子および $P_{[\psi]}$-気体全部があるから，合わせて $3N/4$ 個の $\frac{1}{3}P_{[\varphi]}+\frac{2}{3}P_{[\psi]}$-気体の分子がある．これらの気体をそれぞれ体積 $V/4$ および $3V/4$ に圧縮する．そのとき力学的仕事は，ふたたび熱だめ $\boldsymbol{W}$ に与えられ，あるいはそれからとりさられる．それの大きさはそれぞれ $\frac{N}{4}\kappa\mathbf{T}\ln 2$ および $\frac{3N}{4}\kappa\mathbf{T}\ln\frac{3}{2}$ である（注 195）をみよ）．したがって熱だめのエントロピー増加はそれぞれ $N\kappa\frac{1}{4}\ln 2$ および $-N\kappa\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}$ である．一緒にして

$$N\kappa\cdot\left(\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}\ln 2-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}\right)=N\kappa\cdot\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}.$$

けっきょくわれわれは，体積 $V/4$ および $3V/4$ にそれぞれ $N/4$ および $3N/4$ 個の分子からなる $P_{[\varphi]}$- および $\frac{1}{3}P_{[\varphi]}+\frac{2}{3}P_{[\psi]}$-気体をうる．はじめには N 個

195) 理想気体が M 個の分子からなるとすれば，その圧力は

$$P=M\kappa\mathbf{T}/V$$

である．したがって体積 v_1 から v_2 に圧縮するさいに力学的仕事

$$\int_{v_1}^{v_2}Pdv=M\kappa\mathbf{T}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v}=M\kappa\mathbf{T}\ln\frac{v_2}{v_1}$$

がなされる．われわれの場合には，

$$M=\frac{N}{2},\quad v_1=V,\quad v_2=\frac{V}{2}$$

196) 理想気体のエネルギーは，よく知れているように温度だけに依存する．

の分子からなる $\frac{1}{2}P_{[\varphi]}+\frac{1}{2}P_{[\psi]}$-気体が体積 V にあった，すなわちそれぞれ $\frac{N}{4}$ および $\frac{3N}{4}$ 個の分子からなる2つの $\frac{1}{2}P_{[\varphi]}+\frac{1}{2}P_{[\psi]}$-気体が，体積 $\frac{V}{4}$ および $\frac{3V}{4}$ にあったといってもよい．したがって，全過程によって行われた変化はこうである：体積 $V/4$ にあった $N/4$ 個の分子は，$\frac{1}{2}P_{[\varphi]}+\frac{1}{2}P_{[\psi]}$-気体から $P_{[\varphi]}$-気体に移り，体積 $3V/4$ にあった $3N/4$ 個の分子は $\frac{1}{2}P_{[\varphi]}+\frac{1}{2}P_{[\psi]}$-気体から $\frac{1}{3}P_{[\varphi]}+\frac{2}{3}P_{[\psi]}$-気体に移った．そして $\boldsymbol{W}$ のエントロピーは $N\kappa\cdot\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}$ だけ増大した．この過程は可逆的であったから，エントロピー増加は全体として0でなければならない，すなわち2つの気体のエントロピーの変化は，$\boldsymbol{W}$ のそれとちょうど相殺しなければならない．それゆえ，われわれはなお気体のエントロピー変化を知らなければならない．

のちにわかるように，M 個の分子からなる U-気体は，同じ体積で同じ温度の $P_{[\chi]}$-気体のエントロピーを0にとるならば（まえに述べたことを参照），エントロピー

$$-M\kappa\cdot\mathrm{Spur}(U\ln U)$$

をもつ．したがって，もし U が固有値 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ の純粋な点スペクトルをもつならば，これは

$$-M\kappa\cdot\sum_{n=1}^{\infty}w_n\ln w_n$$

である（ただし $x=0$ のときは $x\ln x=0$ とおかなくてはならない）．さて $P_{[\varphi]}$, $\frac{1}{2}P_{[\varphi]}+\frac{1}{2}P_{[\psi]}$, $\frac{1}{3}P_{[\varphi]}+\frac{2}{3}P_{[\psi]}$ は，たやすく計算されるように，それぞれ固有値 1, 0 および $\frac{1+\alpha}{2}$, $\frac{1-\alpha}{2}$, 0 および

$$\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{6},\ \frac{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}{6},\ 0\quad(\alpha=|(\varphi,\ \psi)|,\ したがって\ \geqq 0,\ \leqq 1)$$

をもつ．ここで0はつねに無限に多重であるが，他の値は1重である[197]．

197) $aP_{[\varphi]}+bP_{[\psi]}$ の固有値はただちに定められ，

$$(aP_{[\varphi]}+bP_{[\psi]})f=\lambda f$$

でなければならない．左辺は φ, ψ の1次結合であるから，右辺もそうであり，したがって，もし $\lambda\neq 0$ ならば f もそうである．$\lambda=0$ はたしかに無限に多重な固有値である．なぜなら φ, ψ に直交する f はすべてそれに属するから．したがって $\lambda\neq 0$ で $f=x\varphi+y\psi$ を考察すればよい．（φ, ψ は1次独立であるとする，でなければ $\varphi=c\psi$, $|c|=1$ であり2つの状態は同一である．）

したがって気体のエントロピーは

$$-\frac{N}{4}\kappa\cdot 0-\frac{3N}{4}\kappa\cdot\Big(\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}\ln\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}$$

$$+\frac{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}\ln\frac{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}\Big)$$

$$+N\kappa\cdot\Big(\frac{1+\alpha}{2}\ln\frac{1+\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{2}\ln\frac{1-\alpha}{2}\Big)$$

だけ増大したのである．これは，$\boldsymbol{W}$ のエントロピー増加 $N\kappa\cdot\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}$ と足し合せて 0 にならなければならない．$N\kappa/4$ で割ってつぎの式がえられる：

$$-\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{2}\ln\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}-\frac{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}{2}\ln\frac{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}{6}$$

$$+2(1+\alpha)\ln\frac{1+\alpha}{2}+2(1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{2}+3\ln\frac{4}{3}=0.$$

ただし $0\leqq\alpha\leqq 1$ である．

さて容易に認められるように，左辺は α が 0 から 1 まで増大するときに単調に 0 から $3\ln\frac{4}{3}$ まで増大するから[198]，$\alpha=0$ でなければならない．（$\alpha\neq 0$ に

このときうえの方程式は

$$a(x+y(\psi,\varphi))\cdot\varphi+b(x(\varphi,\psi)+y)\cdot\psi=\lambda x\cdot\varphi+\lambda y\cdot\psi,$$

すなわち

$$a\cdot x+a\overline{(\varphi,\psi)}\cdot y=\lambda\cdot x,\quad b(\varphi,\psi)\cdot x+b\cdot y=\lambda\cdot y$$

となる．この方程式の行列式が消えなければならない：

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & a\overline{(\varphi,\psi)} \\ b(\varphi,\psi), & b-\lambda \end{vmatrix}=0,\qquad (a-\lambda)(b-\lambda)-ab|(\varphi,\psi)|^2=0,$$

$$\lambda^2-(a+b)\lambda+ab(1-\alpha^2)=0,$$

$$\lambda=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab(1-\alpha^2)}}{2}=\frac{a+b\pm\sqrt{(a-b)^2+4\alpha^2ab}}{2}.$$

それぞれ $a=1,\ b=0$，あるいは $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$ あるいは $a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$ とおけば，本文の式がえられる．

198)
$$(x\ln x)'=\ln x+1$$

であるから，

$$\Big(\frac{1+y}{2}\ln\frac{1+y}{2}+\frac{1-y}{2}\ln\frac{1-y}{2}\Big)'=\frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1+y}{2}+1\Big)$$

$$-\frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1-y}{2}+1\Big)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

であり，本文の表式の微係数は

$$-3\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}\cdot\frac{1}{3}\frac{8\alpha}{\sqrt{1+8\alpha^2}}+4\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

対しては，ここに述べたものと反対の過程は第2法則に反してエントロピーを減少させるであろう!). これでもって $(\varphi, \psi)=0$ が証明された.——

これだけの準備をやっておいて，N-分子の U-気体の，体積 V および温度 T におけるエントロピー——すなわち，より正確には同じ条件下の $P_{[\varphi]}$-気体に対するそのエントロピーの超過分——を決定することに進もう．そうすれば，まえに述べた注意により，それは，N 個の個々の系からなる U-集団の，うえにあたえたように規準をとったときのエントロピーである．Spur U は上述したように1に等しいとする．

そのとき，われわれが知っているように，U は純粋な点スペクトル w_1, w_2, …… をもち，$w_1 \geqq 0$, $w_2 \geqq 0$, ……, $w_1+w_2+\cdots\cdots=1$ である．それらに対応する固有函数を φ_1, φ_2, …… とすると，

$$U=\sum_{n=1}^{\infty} w_n P_{[\varphi_n]}$$

である (IV. 3. をみよ). それだからわれわれの U-気体は，すべて同じ体積 V

$$=2\left(\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}-\frac{2\alpha}{\sqrt{1+8\alpha^2}}\ln\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}\right).$$

これが >0 であることは，

$$\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>\frac{2\alpha}{\sqrt{1+8\alpha^2}}\ln\frac{3+\sqrt{1+8\alpha^2}}{3-\sqrt{1+8\alpha^2}}$$

を，すなわち，

$$\frac{1}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}, \qquad \beta=\frac{\sqrt{1+8\alpha^2}}{3}$$

を意味する．われわれはここで $\frac{2}{3}$ の代りに $\frac{8}{9}$ とおいても証明できる．

$1-\beta^2=\frac{8}{9}(1-\alpha^2)$ および $\alpha<\beta$ (これは $\alpha<1$ により前者から導かれる) のために，これは

$$\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>\frac{1-\beta^2}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

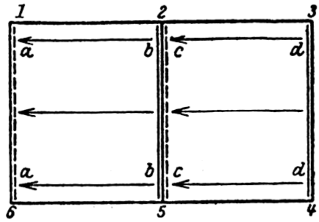
となるが，この式は，

$$\frac{1-x^2}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

が，$0<x<1$ で単調減少であることがわかれば，確証される．このことは，たとえばそれのべき級数でみることができる：

$$\frac{1-x^2}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=(1-x^2)\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\cdots\right)$$
$$=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)x^2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)x^4-\cdots\cdots.$$

にあり，それぞれ w_1N, w_2N, …… 個の分子からなる $P_{[\varphi_1]}$-, $P_{[\varphi_2]}$-, ……気体の混合である．T, V は，ふたたびすべてこれらの気体が理想気体であるようにえらぶ．$\bar{K}$ は長方形の断面をもつものとする．いま，φ_1-分子，φ_2-分子，……をたがいに分離するために，つぎのような可逆的な干渉を行う（第4図をみよ）．$\bar{K}$ (23452) の隣りに，第2の同様に大きな短形の箱 $\bar{K}'$ を増設する (12561)．そして共通の壁 25 を，2つのたがいに密接した壁によっておきかえる：その1つ (25) は固定され，φ_1 は通すが，φ_2, φ_3, …… は反射するように，半透性であるとする；もう1つの壁 (bb) は，移動できる，普通のまったくなにも通さない壁である．さらに 34 に密接した dd に，もう1つの半透壁を挿入する．それは φ_2, φ_3…… は通すが φ_1 は反射するものとする．それから bb と dd を，おたがいのあいだの間隔は一定に保ちながら，aa および cc まで（すなわちそれぞれ 16 および 25 に密接するまで）押しやる．これによって φ_2-分子，φ_3-分子，…… は，少しも影響されないが，φ_1 はつねに可動な壁 bb, dd のあいだにとどまるように強いられる——そのあいだの間隔は一定であるから，（気体の圧力に対して）何の仕事もする必要はなく，したがって熱の発生も起らない．最後に壁 25, cc を，固定されたまったくなにも通さない壁 25 でおきかえ，aa をとり除く．それによって箱 $\bar{K}$, $\bar{K}'$ はもとの状態に復する．ただしいまではすべての φ_1-分子は $\bar{K}'$ にある，ということを除けばである．したがってわれわれはこれらの分子を可逆的に，しかもいかなる仕事もせず，熱の発生あるいは温度変化もなしに，$\bar{K}$ から同じ大きさの箱 $\bar{K}'$ に "くみ出し" たのである[199]．



第 4 図

同じようにして φ_2-分子，φ_3-分子，…… を等しい大きさの箱 $\bar{K}''$, $\bar{K}'''$, ……, に "くみ出す"——こうしてけっきょく，各々体積 V にあって，それぞれ w_1N, w_2N, …… 個の分子からなる $P_{[\varphi_1]}$-, $P_{[\varphi_2]}$-, ……気体がえられる．さて，われわれは，それらを等温的にそれぞれ体積 w_1V, w_2V…… に圧縮する．その

199) この，現象論的熱力学的方法に特徴的な技巧については，たとえば前掲の注184) をみよ．

ためには補償として，大きな熱だめ（この過程が可逆的であるように，温度T の）からそれぞれ熱量 $w_1 N\kappa \mathbf{T} \ln w_1, w_2 N\kappa \cdot \mathbf{T} \ln w_2, \cdots\cdots$（これらの熱量はすべて $<0!$）が供給されなければならない．なぜなら個々の気体に対する力学的な圧縮の仕事は，これらの量にマイナスをつけたものに等しいからである（注195）をみよ）．したがってこれらの過程におけるエントロピー増加の大きさは，

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n N\kappa \ln w_n$$

である．おしまいに $P_{[\varphi_1]}$-, $P_{[\varphi_2]}$-, …… 気体をすべて $P_{[\varphi]}$-気体（φ は任意にえらんだ状態）に移す．そうすると，それぞれ体積 $w_1V, w_2V, \cdots\cdots$ にある $w_1N_1, w_2N_1 \cdots\cdots$ 個の分子からなる $\mathrm{P}_{[\varphi]}$-気体だけがあることになる．それらはすべて同じものでしかも等しい密度（$N:V$）をもつから，それらを混ぜ合せることができる．これもまた可逆的である．こうして $\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1\right.$ であるから$\left.\right)$ 体積 V にある N 個の分子からなる $P_{[\varphi]}$-気体がえられる．

このようにして，われわれは求める可逆的変化をやりとげたのである．そのさいエントロピーは

$$N\kappa \sum_{n=1}^{\infty} w_n \ln w_n$$

だけ増加したが，最後の状態におけるエントロピーは（われわれの規格化にしたがえば）0であるから，最初の状態におけるエントロピーは

$$-N\kappa \sum_{n=1}^{\infty} w_n \ln w_n$$

であった．

U は，固有値 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ をもつ固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ を有するから，$U \ln U$ は同じ固有函数をもち，その固有値は $w_1 \ln w_1, w_2 \ln w_2, \cdots\cdots$ である．したがって

$$\mathrm{Spur}(U \ln U) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \ln w_n.$$

注意すべきこと；$w_n \geqq 0$, $\leqq 1$ であるから，$w_n \ln w_n \leqq 0$，しかも $w_n = 0, 1$ のときにのみ $=0$ である——$w_n = 0$ のとき $w_n \ln w_n = 0$ とおかなければならないことは，われわれの考察では0に等しい w_n を考察しなくてもよいことから

結論される．なお連続性を考えても同じ結果がえられる．

したがって，われわれは N 個の独立的な系からなる U-集団のエントロピーを

$$-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)$$

と決定するに到った．まえに $w_n \ln w_n$ について述べたことによって，エントロピーがつねに $\geqq 0$ であり，$=0$ であるためには，すべての $w_n=0,\ 1$ でなければならないことがわかる．Spur $U=1$ であるから，ちょうど1つの w_n が $=1$ であり他は $=0$，したがって $U=P_{[\varphi]}$ である．すなわち：$U=P_{[\varphi]}$，つまり状態はみなエントロピー0をもち，他のすべての混合はエントロピー >0 をもつ．

3. 可逆性および平衡の問題

いまや，V.1で主張した測定過程の不可逆性を証明することができる．例えば，U が状態 $U=P_{[\varphi_n]}$ のときには，固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をもつ作用素 R に対する量 $\mathfrak{R}$ の測定によって，U は集団

$$U'=\sum_{n=1}^{\infty}(P_{[\varphi]}\varphi_n,\ \varphi_n)\cdot P_{[\varphi_n]}=\sum_{n=1}^{\infty}|(\varphi,\ \varphi_n)|^2 P_{[\varphi_n]}$$

へ移行する．そして，U' が状態でなければエントロピーが増大するから，(U のエントロピーは0であったが U' のエントロピーは >0)，この過程は不可逆である．しかるに U' が状態であるためには，すなわち，φ_n がその固有函数であるから，U' が1つの $P_{[\varphi_n]}$ であるためには，ある1つ（それは $=1$）をのぞいてすべての

$$|(\varphi\cdot\varphi_n)|^2=0.$$

すなわち，φ はすべての φ_n, $n\neq\bar{n}$ に直交しなければならない．しかしそうすると $|c|=1$ として $\varphi=c\varphi_{\bar{n}}$，ゆえに

$$P_{[\varphi]}=P_{[\varphi_{\bar{n}}]},\qquad U=U'$$

となる．したがって，測定される量の固有函数が（すなわち，与えられた状態においてこの量が）鋭い値をもつ場合を例外として，ある状態に対する測定はすべて不可逆である．そしてこの例外の場合には測定によって状態はまったく変化しない．それゆえ，非因果的なふるまいは，またなんらかの熱力学的随伴現象と一義的に結びついていることがわかる．

さて，さらに進んで，過程 1,

$$U \to U' = \sum_{n=1}^{\infty} (U\varphi_n, \varphi_n) \cdot P_{[\varphi_n]}$$

がどのようなときにエントロピーを高めるか，をまったく一般的に論じなければならない．

Uのエントロピーは

$$-N\kappa \operatorname{Spur}(U \ln U)$$

であるが，Uの固有値を $w_1, w_2, \cdots\cdots$; 固有函数を $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ とすれば，これは，

$$-N\kappa \sum_{n=1}^{\infty} w_n \ln w_n = -N\kappa \sum_{n=1}^{\infty} (U\psi_n, \psi_n) \ln (U\psi_n, \psi_n)$$

に等しい．U' の固有値は $(U\varphi_1, \varphi_1), (U\varphi_2, \varphi_2), \cdots\cdots$ であるから，そのエントロピーは

$$-N\kappa \sum_{n=1}^{\infty} (U\varphi_n, \varphi_n) \ln (U\varphi_n, \varphi_n)$$

である．したがって，

$$* \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (U\psi_n, \psi_n) \ln (U\psi_n, \psi_n) \gtreqless \sum_{n=1}^{\infty} (U\varphi_n, \varphi_n) \ln (U\varphi_n, \varphi_n)$$

に応じて，Uのエントロピー $\lesseqgtr U'$ のエントロピーである．

まず，* においては，いずれにせよ $\geqq$ が成り立つ，すなわち，過程 $U \to U'$ はエントロピーを減少させないということを示す．これは熱力学的には明らかなことであるが，しかしのちの目的のためには，この事実の純数学的な証明を与えることも意味がある．そこで，Uおよび $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は固定し，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ の方はあらゆる規格化された完全直交系でありうるとして議論を進める．

まず連続性を根拠として，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ のうち，対応する ψ_n と異なる φ_n は有限個しかないような系に限ることができる．したがって，例えば $n > M$ として $\varphi_n = \psi_n$, そして $n \leqq M$ に対する φ_n は，同じく $n \leqq M$ に対する ψ_n の１次結合であり，また逆もいえる――ゆえに

$$\psi_m = \sum_{n=1}^{M} x_{mn} \varphi_n \quad (m = 1, \cdots\cdots, M).$$

M 次元の行列 $\{x_{mn}\}$ は明らかにユニタリーである．

$$(U\psi_m, \psi_m) = w_m$$

であり，また容易に計算されるように

$$(U\varphi_m,\ \varphi_m)=\sum_{n=1}^{M} w_n|x_{mn}|^2 \quad (m=1,\cdots\cdots,M)$$

であるから

$$\sum_{m=1}^{M} w_m \ln w_m \geqq \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{M} w_n|x_{mn}|^2\right)\ln\left(\sum_{n=1}^{M} w_n|x_{mn}|^2\right)$$

が証明すべき式である．右辺は M^2 個の有界な変数 x_{mn} の函数だから極大値があり，しかも実際その値をとる（$\{x_{mn}\}$ はユニタリー）．左辺は，

$$x_{mn}\begin{cases}=1 & m=n \text{ に対して}\\ =0 & m\neq n \text{ に対して}\end{cases}$$

であるときの右辺の値に等しいから，証明すべきことは，いまいった極大値がこの x_{mn} の値に対応しているということである．

そこで，極大値をとるときの値の系を $x^0{}_{mn}$ $(m,\ n=1,\cdots\cdots,M)$ としよう．行列 $\{x^0{}_{mn}\}$ にユニタリー行列

$$\begin{Bmatrix} \alpha, & \beta, & 0, & 0\\ -\bar{\beta}, & \bar{\alpha}, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 1, & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & 0, & 1\end{Bmatrix},\quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

を掛けるとユニタリー行列 $\{x'_{mn}\}$ ができ，これもやはり許される x_{mn}-系である．

$$\alpha=\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad \beta=\theta\varepsilon \quad (\varepsilon \text{ は実数，} |\theta|=1)$$

とおき，ε は小さいとして，以下のすべての計算では，$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2$ の項だけを厳密に計算し，$\varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\cdots\cdots$ の項は省略する．そうすると $\alpha\approx 1-\frac{1}{2}\varepsilon^2$ となり，新しい行列 $\{x'_{mn}\}$ において

$$x_{1n}'\approx\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)x^0{}_{1n}+\theta\varepsilon x^0{}_{2n},$$

$$x_{2n}'\approx-\bar{\theta}\varepsilon x_{1n}{}^0+\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\right)x_{2n}{}^0$$

$$x_{mn}'=x_{mn}{}^0 \quad (m\geqq 3)$$

となる．したがって，

$$\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}'|^2 \approx \sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2 + \sum_{n=1}^{M} 2w_n \Re(\bar{\theta} x_{1n}^0 \bar{x}_{2n}^0) \cdot \varepsilon + \sum_{n=1}^{M} w_n (-|x_{1n}^0|^2 + |x_{2n}^0|^2) \cdot \varepsilon^2,$$

$$\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}'|^2 \approx \sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2 - \sum_{n=1}^{M} 2w_n \Re(\bar{\theta} x_{1n}^0 \bar{x}_{2n}^0) \cdot \varepsilon - \sum_{n=1}^{M} w_n (-|x_{1n}^0|^2 + |x_{2n}^0|^2) \cdot \varepsilon^2,$$

$$\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}'|^2 = \sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}^0|^2 \qquad (m \geqq 3).$$

これらの表式を $f(x) = x \ln x$ に代入し，

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x}$$

に注意しながら，すべてを加え合わせると

$$\sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}'|^2 \right) \ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}'|^2 \right) \approx \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}^0|^2 \right) \ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}^0|^2 \right)$$
$$+ \left\{ \ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2 \right) - \ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2 \right) \right\} \sum_{n=1}^{M} 2w_n \Re(\bar{\theta} x_{1n}^0 \bar{x}_{2n}^0) \cdot \varepsilon$$
$$+ \Bigg[- \left(\ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2 \right) - \ln \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2 \right) \right) \left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2 - \sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2} + \frac{1}{\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2} \right) \left(\sum_{n=1}^{M} 2 \Re(\bar{\theta} x_{1n}^0 \bar{x}_{2n}^0) \right)^2 \Bigg] \cdot \varepsilon^2$$

となる．右辺の第1項が極大値であるためには，ε の係数 $=0$, ε^2 の係数 $\leqq 0$ でなければならない．前者は2つの因数 $\ln\left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{1n}^0|^2\right) - \ln\left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{2n}^0|^2\right)$ および $\sum_{n=1}^{M} 2w_n \Re(\bar{\theta} x_{1n}^0 \bar{x}_{2n}^0)$ をもっている．第1の因数 $=0$ であれば，ε^2 の係数において第1項 $=0$（これはつねに $\leqq 0$）となり，全体が $\leqq 0$ であるためには，明らかに恒等的に $\geqq 0$ である第2項が消えなければならない．それは，

$$\sum_{n=1}^{M} 2w_n \Re(\bar{\theta} x_{1n}{}^0 \bar{x}_{2n}{}^0) = 0$$

を意味する．したがって，ε の係数の第2の因数はいずれにせよ $=0$ であり，これはまた

$$2\Re\left(\bar{\theta} \sum_{n=1}^{M} w_n x_{1n}{}^0 \bar{x}_{2n}{}^0\right) = 0$$

と書くこともできる．適当な θ をとると，これは絶対値において $\sum_{n=1}^{M}$ を越えるから，この和は消えなければならない：

$$\sum_{n=1}^{M} w_n x_{1n}{}^0 \bar{x}_{2n}{}^0 = 0.$$

1と2の代りに，2つの異った $k, j=1, \cdots\cdots, M$ のどれをとってもよいから，

$$\sum_{n=1}^{M} w_n x_{kn}{}^0 \bar{x}_{jn}{}^0 = 0 \qquad k \neq j \text{ に対して}$$

が得られる．すなわち，行列 $\{x_{mn}{}^0\}$ によるユニタリーな座標変換は，対角要素 $w_1, \cdots\cdots, w_n$ をもつ対角行列をふたたび対角形に変換する．対角要素は行列の乗法子（または固有値）であるから，座標変換によって変化せず，たかだか，たがいに置換されうるだけである．それらは変換のまえには w_m（$m=1, \cdots\cdots, M$）であったが，変換後には $\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}{}^0|^2$（$m=1, \cdots\cdots, M$）である．したがって，和

$$\sum_{n=1}^{M} w_n \ln w_n, \quad \text{および} \quad \sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}{}^0|^2\right) \ln\left(\sum_{n=1}^{M} w_n |x_{mn}{}^0|^2\right)$$

は同じ値をもつ，すなわち，われわれが主張したとうり，

$$x_{mn} \begin{cases} =1 & m=n \text{ に対して} \\ =0 & m \neq n \text{ に対して} \end{cases}$$

にも1つの極大値が存在する．

つぎに，* においていつ等号が成り立つかを確定しよう．それが成り立てば

$$\sum_{n=1}^{\infty} (U\chi_n, \chi_n) \ln (U\chi_n, \chi_n)$$

は，$\chi_n = \varphi_n$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）に対してだけでなく，$\chi_n = \psi_n$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）に対しても極大値をとる（$\chi_1, \chi_2, \cdots\cdots$ はすべての規格化された完全直系交にわたって動く）．このことはなかでも，最初の M 個の ψ_n だけがユニタリー

に変換される場合（すなわち，$n>M$ に対して $\chi_n=\psi_n$）にも成り立つ．

$$u_{mn}=(U\psi_m,\ \psi_n) \quad (m,\ n=1, \cdots\cdots, M)$$

とおき，$v_1, \cdots\cdots, v_N$ を有限な（やはりエルミートで定符号の）行列 $\{u_{mn}\}$ の固有値，$\{u_{mn}\}$ を対角形に変換する行列を $\{\alpha_{mn}\}$ $(m,\ n=1, \cdots\cdots, M)$ とする．この行列が $\psi_1, \cdots\cdots, \psi_M$ を $\omega_1, \cdots\cdots \omega_M$ に移すとする：

$$\psi_m=\sum_{n=1}^{M}\alpha_{mn}\omega_n \quad (m=1, \cdots\cdots, M).$$

そうすれば，

$$U\omega_n=v_n\omega_n.$$

したがって

$$(U\omega_m,\ \omega_n)=\begin{cases} v_n & m=n \text{ に対して} \\ 0 & m\neq n \text{ に対して} \end{cases}$$

となる．したがって，

$$\xi_m=\sum_{n=1}^{M}x_{mn}\omega_n$$

$(m=1, \cdots\cdots, M;\ \{x_{mn}\}$ もユニタリーとする）に対して

$$(U\xi_k,\ \xi_j)=\sum_{n=1}^{M}v_n x_{kn}\bar{x}_{jn}.$$

ゆえに，$\psi_1, \cdots\cdots, \psi_N$ についての仮定のために，

$$\sum_{m=1}^{M}\Big(\sum_{n=1}^{M}v_n|x_{mn}|^2\Big)\ln\Big(\sum_{n=1}^{M}v_n|x_{mn}|^2\Big)$$

は $x_{mn}=\alpha_{mn}$ において極大値をとる．さきほど証明したことによってこれから

$$\sum_{n=1}^{M}v_n\alpha_{kn}\bar{\alpha}_{jn}=0 \qquad k\neq j \text{ に対して},$$

すなわち，

$$(U\psi_k,\ \psi_j)=0 \quad k\neq j, \qquad k,\ j=1, \cdots\cdots, M$$

がえられる．

これはすべての M に対して成り立たなければならないから，$U\psi_k$ は，すべての $k\neq j$ であるような ψ_j に直交する――したがって $w_k'\psi_k$ に等しい（w_k' はある定数）．こうして，$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は U の固有函数で，$w_1', w_2', \cdots\cdots$ がそれに属する固有値（したがって，$w_1, w_2, \cdots\cdots$ の置換）である．しかるにこのような事情のもとでは

$$U' = \sum_{n=1}^{\infty}(U\psi_n, \psi_n)\cdot P_{[\psi_n]} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n'\cdot P_{[\psi_n]} = U$$

である．かくしてつぎのことが見出された：

過程 *1.*

$$U \to U' = \sum_{n=1}^{\infty}(U\psi_n, \psi_n)\cdot P_{[\psi_n]}$$

（$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ は，測定される量 $\mathfrak{R}$ の作用素 R の固有函数）は，けっしてエントロピーを減少させない．むしろ，すべての $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ が U の固有函数であって $U=U'$ となる場合をのぞいて，つねにエントロピーが増大する．

この例外の場合には，そのうえ U が R と交換可能である．そしてこのことがまた，$U=U'$ であることを特徴づける（なぜなら，U と R との交換可能性は共通の固有函数系 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ が存在することと同等だからである．II. 10 参照）.

したがって，過程 *1.* は，概してそれがある変化をひき起すすべての場合において不可逆である．——

ここにおいて可逆性の問題を，V. 2 でプログラムの第 2 として予告しておいたように，過程 *1, 2.* にそくして現象論的熱力学とは独立に扱うことができる．これをうまく行うための数学的方法は，われわれがすでに知っているものである：第 2 主法則が成り立つならばエントロピーは $-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U \ln U)$ に等しくなければならないが，これは過程 *1, 2.* のどちらにおいても減少することが許されない——したがってわれわれは，エントロピーとしての意味とは無関係に，単なる計算量として $-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U \ln U)$ を扱い，それが *1, 2.* にさいしてどうなるかを確めなければならない[200].

2. においては U から $U_t = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathsf{H}} U e^{\frac{2\pi i}{h}t\mathsf{H}}$ となる．すなわち，ユニタリー作用素 $e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathsf{H}}$ を A で表わせば，

$$U \to U_t = AUA^{-1}.$$

$f \to Af$ は，A のユニタリー性のために，ヒルベルト空間の自己同型写像であって，各作用素 P を APA^{-1} に移すから，一般に

$$F(APA^{-1}) = AF(P)A^{-1}$$

である．ゆえに，

200）もちろん，ここでは因数 $N\kappa$ を落して $-\mathrm{Spur}(U \ln U)$ を考察することもできよう．あるいはまた，要素の数 N を保って $-N\,\mathrm{Spur}(U \ln U)$ とすることもできる．

$$U_t \ln U_t = A \cdot U \ln U \cdot A^{-1}.$$

これから

$$\mathrm{Spur}(U_t \ln U_t) = \mathrm{Spur}(U \ln U).$$

すなわち，われわれの $-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U \ln U)$ という量は **2.** にさいして一定である．**1.** のさいにどうなるかは，いましがた確めたところである（しかも第2主法則を引合いにださずに）：そのさいUが変化するならば(すなわち，$U \neq U'$)この量は増大する．Uが変らないときには（すなわち，$U=U'$ あるいは，$\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ がUの固有函数，あるいはUとRとが交換可能），この量もむろん不変である．したがって，**1.** および **2.** の過程のいくつもが組み合わされた（数も順番も任意）交渉の仕方にさいしては，過程 **1.** のすべてが無効である（なんの変化も生じない）ならば，$-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U \ln U)$ は不変であるが，他のすべての場合にはこれは増大する．したがって，**1.**, **2.** という交渉の仕方だけが考察されるならば，概して変化を生ずるところの過程 **1.** はすべて不可逆である．

そのほかにも $-\mathrm{Spur}(U \ln U)$ より簡単で，**2.** にさいして増大せず，**1.** にさいしては一定である表現が存在する：例えば，Uの最大の固有値である．実際，**2.** のさいには，それはすべての U の固有値と同じく不変である——**1.** のさいには，Uの固有値 $w_1, w_2, \cdots\cdots$ は U' の固有値 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_{1n}|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_{2n}|^2$, $\cdots\cdots$ へ移行する（この節のはじめの方の考察をみよ）．そして，行列 $\{x_{mn}\}$ のユニタリー性のために

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{1n}|^2 = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_{2n}|^2 = 1, \cdots\cdots$$

が成り立つから，これらの数はすべて $\leqq$ 最大の w_n，である（すべての $w_n \geqq 0$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1$ のために $w_n \to 0$ が成り立つから最大の w_n が存在する)．ところで，

$$-\mathrm{Spur}(U \ln U) = -\sum_{n=1}^{\infty} w_n \ln w_n$$

を不変に保ちながら，最大の w_n が減少するように U を変化させることはまったく可能であるから，現象論的熱力学の意味では可能でありながら——したがって，われわれの気体過程によって現実に遂行可能である——，**1.**, **2.** をつぎつぎに適用するだけでは，けっして成就できない過程が存在するということ

がわかる．このことは，気体の方法を導入することが避けられないことを示している．

$-\mathrm{Spur}(U\ln U)$ のかわりに，適当な函数 $F(x)$ を考察することもできる．これが $U\neq U'$ であるような **1.** のさいに増大することは（いうまでもなく $U=U'$ に対しては，**2.** のさいと同じく不変である），$F(x)=-x\ln x$ のときに使用したただ1つのこの函数の性質が，$F(x)$ の場合にも存在しさえすれば，さきと同様に証明することができる．その性質とは，$F''(x)<0$, および $F'(x)$ が単調に減少することである．しかしあとの性質ははじめのから導かれる．したがって，不可逆性についてのわれわれの非熱力学的な考察のためには，$F(x)$ が上に凸な函数でありさえすれば，すなわち $F''(x)<0$ ($0\leqq x\leqq 1$ において，Uの固有値はすべてそのなかにあるから）が成り立ちさえすれば，どんな $\mathrm{Spur}(F(U))$ でも使うことができる．

最後につぎのことが指摘されるべきであろう．すなわち，2つの集団 U, V を混合することも（例えば $\alpha:\beta$ の割合で，$\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$）エントロピーを減少させない，すなわち，

$$-\mathrm{Spur}((\alpha U+\beta V)\ln(\alpha U+\beta V))$$
$$\geqq -\alpha\,\mathrm{Spur}(U\ln U)-\beta\,\mathrm{Spur}(V\ln V).$$

これもまた，$-x\ln x$ をどんな凸な $F(x)$ におきかえても成り立つ．証明は読者にまかせることにしよう．——

エネルギーが与えられたときに，定常な平衡にある混合，すなわちエントロピー最大の混合を探し出そうと思う．エネルギーが与えられるとはもちろん，エネルギーの期待値が指定されているという意味に理解されなければならない——統計集団の熱力学的研究のための，注 184）で引用した方法にしたがえば，このような理解だけが要求されるのである．したがって，

$$\mathrm{Spur}\,U=1,\quad \mathrm{Spur}(U\mathrm{H})=\mathbf{E}$$

であるようなUに対する集団だけが許される．ただし H はエネルギー作用素であり，$\mathbf{E}$ はあらかじめ与えられたエネルギーの期待値である——そしてこれらの附加条件のもとで $-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)$ を最大にしなければならない．さらに，簡単のために，H は純粋の点スペクトルをもち，その固有値は例えば $W_1, W_2, \cdots\cdots$，固有函数は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ である（多重性はあってもよい）と仮定する．

$\mathfrak{R}$ を1つの量，その作用素Rの固有函数は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ で，これらに対す

る固有値はすべて異なるとする．$\mathfrak{R}$ の測定は U を 1. にしたがって

$$U'=\sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n,\ \varphi_n)P_{[\varphi_n]}$$

に変換し，そのさい $U=U'$ でなければ，$-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)$ は増大する．しかし，φ_n は H の固有函数であって，$m\neq n$ に対して $(\mathsf{H}\varphi_m,\ \varphi_n)$ が消えるから，$\mathrm{Spur}(U)$, $\mathrm{Spur}(U\mathsf{H})$ は変化しない：

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(U'\mathsf{H})&=\sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n,\ \varphi_n)\mathrm{Spur}(P_{[\varphi_n]}\mathsf{H})\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(U\varphi_n,\ \varphi_n)(\mathsf{H}\varphi_n,\ \varphi_n)=\sum_{m,n=1}^{\infty}(U\varphi_m,\ \varphi_n)(\mathsf{H}\varphi_n,\ \varphi_m)\\&=\mathrm{Spur}(U\mathsf{H});\end{aligned}$$

また，R と H との交換可能性（すなわち，$\mathfrak{R}$ とエネルギーとの同時測定可能性）のためにもそうでなければならない．したがって求める最大値は，固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をもつ統計作用素 U' に限った場合のものであり，またそのようなもののうちでのみ最大値が実現する．したがって

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}w_nP_{[\varphi_n]}$$

である．そして，U, $U\mathsf{H}$, $U\ln U$ はすべて固有函数 φ_n と，それぞれ固有値 w_n, W_nw_n, $w_n\ln w_n$ をもつから，問題は附加条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}w_n=1 \quad \sum_{n=1}^{\infty}W_nw_n=\mathbf{E}$$

のもとで，$-N\kappa\sum_{n=1}^{\infty}w_n\ln w_n$ を最大にすることである．しかるに，これは，通常の気体理論におけるこれに相当した平衡の問題のさいに生じたのと正確に同じ課題であるから[201]，同じように解決される．極値計算のよく知られた規則によれば，最大値を与える $w_1, w_2, \cdots\cdots$ の系に対して

$$\frac{\partial}{\partial w_n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}w_m\ln w_m\right)+\alpha\frac{\partial}{\partial w_n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}w_m\right)+\beta\frac{\partial}{\partial w_n}\left(\sum_{m=1}^{\infty}W_mw_m\right)=0$$

が成り立たなければならない．ここで α, β は適当な定数，$n=1, 2, \cdots\cdots$ である．したがって，

$$(\ln w_n+1)+\alpha+\beta W_n=0,\ \ w_n=e^{-1-\alpha-\beta W_n}=ae^{-\beta W_n}.$$

201） 例えば Planck: *Theorie der Wärmestrahlung*, Leipzig 1913.

ただし，αのかわりに定数 $a=e^{-1-\alpha}$ を導入した．

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n = 1$$

から

$$a = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta W_n}}$$

となるから，

$$w_n = \frac{e^{-\beta W_n}}{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\beta W_m}}.$$

また $\sum_{n=1}^{\infty} W_n w_n = \mathbf{E}$ によって

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} W_n e^{-\beta W_n}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta W_n}} = \mathbf{E}$$

でなければならないが，これによってβが定まる．ふつうやるように“状態和”

$$Z(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta W_n} = \mathrm{Spur}(e^{-\beta \mathsf{H}})$$

を導入すれば（このこと，および以下については注 201）をみよ），

$$Z'(\beta) = -\sum_{n=1}^{\infty} W_n e^{-\beta W_n} = -\mathrm{Spur}(\mathsf{H} e^{-\beta \mathsf{H}}).$$

したがって，βに対する条件は

$$-\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)} = \mathbf{E}$$

となる（ここでなお $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta W_n}$ および $\sum_{n=1}^{\infty} W_n e^{-\beta W_n}$ がすべての $\beta>0$ に対して収斂する．すなわち $n\to\infty$ に対して十分はやく $W_n\to\infty$，例えば $W_n/\ln n\to\infty$ であると仮定している）．そうすると，U 自身の表現としてつぎのものがえられる：

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} a e^{-\beta W_n} P_{[\varphi_n]} = a e^{-\beta \mathsf{H}} = \frac{e^{-\beta \mathsf{H}}}{\mathrm{Spur}(e^{-\beta \mathsf{H}})} = \frac{e^{-\beta \mathsf{H}}}{Z(\beta)}.$$

平衡にある集団 U は $\mathbf{E}$ あるいは，β の値を与えることによって定まり，したがって，当然のことながら1個のパラメーターに依存する．そして，この集団の性質は気体論におけるふつうの方法によって定めることができる．

われわれの集団のエントロピーは

$$S=-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)=-N\kappa\,\mathrm{Spur}\left(\frac{e^{-\beta\mathsf{H}}}{Z(\beta)}\ln\frac{e^{-\beta\mathsf{H}}}{Z(\beta)}\right)$$

$$=-\frac{N\kappa}{Z(\beta)}\mathrm{Spur}(e^{-\beta\mathsf{H}}(-\beta\mathsf{H}-\ln Z(\beta)))$$

$$=\frac{\beta N\kappa}{Z(\beta)}\mathrm{Spur}(\mathsf{H}e^{-\beta\mathsf{H}})+\frac{\ln Z(\beta)N\kappa}{Z(\beta)}\mathrm{Spur}(e^{-\beta\mathsf{H}})$$

$$=N\kappa\left[-\frac{\beta Z'(\beta)}{Z(\beta)}+\ln Z(\beta)\right],$$

全エネルギーは

$$N\mathbf{E}=-N\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}$$

である（$\mathbf{E}$ 自身でなくこの量が S とならび称されるべきものである）．これらによって $U, S, N\mathbf{E}$ が β で表わされる． β だけを $\mathbf{E}$ によって表わそうとするかわりに，平衡混合の温度 $\mathbf{T}$ をきめて，すべてこれに帰着させる方がいっそう実際的である．それはつぎのように行われる．われわれの平衡混合を温度 $\mathbf{T}'$ の熱だめに接触させて，そこからエネルギーを $Nd\mathbf{E}$ だけ取りこむとしよう——そのさい（両主法則の意味で）全エネルギーは不変のままでエントロピーは減少しないことが必要である．それゆえ熱だめはエネルギー $Nd\mathbf{E}$ を失い，したがってそのエントロピー増加は $-Nd\mathbf{E}/\mathbf{T}'$ である．そして同時に

$$dS-\frac{Nd\mathbf{E}}{\mathbf{T}'}=\left(\frac{dS}{Nd\mathbf{E}}-\frac{1}{\mathbf{T}'}\right)Nd\mathbf{E}\geqq 0$$

でなければならない．他方，冷い物体は暖い物体からエネルギーを受け取るから，あきらかに，$\mathbf{T}'\gtreqless\mathbf{T}$ に応じて $Nd\mathbf{E}\gtreqless 0$ である——したがって $\mathbf{T}'\gtreqless\mathbf{T}$ は

$$\frac{dS}{Nd\mathbf{E}}-\frac{1}{\mathbf{T}'}\gtreqless 0,$$

すなわち

$$\mathbf{T}'\gtreqless\frac{Nd\mathbf{E}}{dS}=\frac{N\dfrac{d\mathbf{E}}{d\beta}}{\dfrac{dS}{d\beta}}$$

を意味する．ゆえに

$$\mathbf{T}=\frac{N\frac{d\mathbf{E}}{d\beta}}{\frac{dS}{d\beta}}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)'}{\left(\ln Z(\beta)-\beta\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)'}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)'}{-\beta\left(\frac{Z'(\beta)}{Z(\beta)}\right)'}$$
$$=\frac{1}{\kappa\beta}.$$

すなわち

$$\beta=\frac{1}{\kappa\mathbf{T}}.$$

こうして $U, S, U\mathbf{E}$ のすべてが温度の函数として表わされる．

エントロピー，平衡混合等々に対してうえにえられた表現と，古典力学に基礎をおく熱力学的な理論のこれに対応する結果との類似は著しい．第1はエントロピー $-N\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)$ である．

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}w_nP_{[\varphi_n]}$$

は，集団 $P_{[\varphi_1]}, P_{[\varphi_2]},\cdots\cdots$ を $w_1:w_2:\cdots\cdots$ の割合で含む混合である．すなわち，Nw_1 個の φ_1 系：Nw_2 個の φ_2 系，…… である．この集団の Boltzmann 流のエントロピーは“複合の数”

$$\frac{N!}{(Nw_1)!(Nw_2)!\cdots\cdots}$$

のたすけをかりて求められる：エントロピーはこれの対数の κ 倍である[201]．N が大きいから Stirling の公式

$$x!\approx\sqrt{2\pi x}e^{-x}x^x$$

によって近似を使うことが許される！そうすると，

$$\kappa\ln\frac{N!}{(Nw_1)!(Nw_2)!\cdots\cdots}$$

の本質的な部分は $-N\kappa\sum_{n=1}^{\infty}w_n\ln w_n$ となる——ところがこれはまさしく $-\mathrm{Spur}(U\ln U)$ である．

さらに，われわれは平衡混合 $U=e^{-\frac{H}{\kappa\mathbf{T}}}$ をえたが（規格化の因数 $1/Z(\beta)$ はおとしてある），これは

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{W_n}{\kappa\mathbf{T}}}P_{[\varphi_n]}$$

に等しい．したがって，状態 $P_{[\varphi_1]}, P_{[\varphi_2]}, \cdots\cdots$ すなわちエネルギー $W_1, W_2, \cdots\cdots$ をもつ定常状態を，それぞれ（相対的）重み

$$e^{-\frac{W_1}{\kappa T}} : e^{-\frac{W_2}{\kappa T}} : \cdots\cdots$$

で混合したものである．エネルギーの固有値がどれか多重である，$W_{n_1} = \cdots\cdots = W_{n_\nu} = W$ ならば，混合のなかには，$P_{[\varphi_{n_1}]} + \cdots\cdots + P_{[\varphi_{n_\nu}]}$ が重み $e^{-\frac{W}{\kappa T}}$ で，すなわち，正しく規格化された集団 $\frac{1}{\nu}(P_{[\varphi_{n_1}]} + \cdots\cdots + P_{[\varphi_{n_\nu}]})$ が重み $\nu e^{-\frac{W}{\kappa T}}$ ではいってくる．しかるに，古典的な“正準”集団は正確にそのように定義されるのである（量子力学独特の構造物である $\frac{1}{\nu}(P_{[\varphi_{n_1}]} + \cdots\cdots P_{[\varphi_{n_\nu}]})$ がはいってくることは無視する）：これがいわゆる Boltzmann の定理である（前掲の注201）をみよ）．

$\mathrm{T}\to\infty$ に対して重み $e^{-\frac{W_n}{\kappa T}}$ は 1 へ向うから，われわれの U は $\sum_{n=1}^{\infty} P_{[\varphi_n]} = 1$ へ向う．したがって エネルギーの制限さえなければ $U=1$ が絶対平衡の状態である．これはすでに IV.3 でえた結果である．いまの理論からは“量子軌道の等しい事前確率”（すなわち，単純な，縮退のない量子軌道の等しい事前確率——一般に固有値の多重度は“事前重み”である；まえに述べたことを参照）がひとりでに出てくることがわかる．

つぎのようなことは確めてみる価値がある：与えられたエネルギーの平衡混合 U について，非熱力学的にどれだけのことがいえるか——すなわち，U は定常的であり（時間の経過によって変化しない，過程 **2.**），エネルギーに影響をおよぼさないすべての測定のさいに（すなわち，エネルギーと同時に測定可能な量の測定のさいに；交換可能な R, H による過程 ***1.***，つまり $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は H の固有函数）不変である，という事実だけを基礎にしてどれだけのことがいえるか．

はじめの事実は，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}U = \frac{2\pi i}{h}(U\mathsf{H} - \mathsf{H}U)$$

のために，H と U とが交換可能であることを意味するだけである．あとの方の意味は $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が H の完全な固有函数系として利用できるとすれば，$U = U'$ すなわち，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ はまた U の固有函数でもある，ということである．対応する H の固有値を $W_1, W_2, \cdots\cdots$；U の固有値を $w_1, w_2, \cdots\cdots$

とする．$W_j=W_k$ ならば，H において φ_j, φ_k を

$$\frac{\varphi_j+\varphi_k}{\sqrt{2}},\quad \frac{\varphi_j-\varphi_k}{\sqrt{2}}$$

でおきかえることができ，したがってUの固有函数もそうである——このことから $w_j=w_k$ となる．こうして

$$F(W_n)=w_n \qquad n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

となる函数 $F(x)$ を構成できれば

$$F(\mathsf{H})=U$$

である．これが十分であることは明らかである．同様にまたこれからHとUとの交換可能性が，でてくることも明らかである．

したがって，このような方法は $U=F(\mathsf{H})$ をえるには十分であるが，$F(x)$ の決定（われわれが知ったように

$$F(x)=\frac{1}{Z(\beta)}e^{-\beta x},\quad \beta=\frac{1}{k\mathbf{T}}\Big)$$

となると，うまくいかない．$\mathrm{Spur}(U)=1$, $\mathrm{Spur}(U\mathsf{H})=\mathbf{E}$ からなお，

$$\sum_{n=1}^{\infty}F(W_n)=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}W_nF(W_n)=\mathbf{E}$$

がえられるが，これでいまの方法はまったく尽されてしまうのである．

4. 巨視的測定

われわれのエントロピーの表式は，うえにみたように，古典論のエントロピーに全く類似した形をもっているけれども，それが系の時間的発展（過程 ***2.***）においては不変であり，ただ測定（過程 ***1.***）においてのみ増大するということは，不審に思われるにちがいない——測定が一般になんらの役割を演じない古典論では，エントロピーは通則として，系の普通の力学的な時間的発展にさいしてすでに増大するのであった．したがって，この一見矛盾のようにみえるふるまいを解明することが必要である．

通常の古典的な熱力学の考察は，つぎのように進められる：体積Vの容器をとり，その右半分（体積 $V/2$, 隔壁によって他の半分から分離されている）には温度 $\mathbf{T}$ の１つの気体（簡単のために理想気体とする）の分子が M 個あるとする．この気体を等温かつ可逆的に体積 V に膨脹させたとしよう（それを行うのには，気体の圧力によって隔壁を押しやらせ，そのときにえられる力学的仕事をとり出し，そして温度 $\mathbf{T}$ の大きな熱だめによって気体の温度を一

定に保てばよい). そうすると外部（熱だめ）のエントロピーは $M\kappa \ln 2$ だけ減少し（注 195）をみよ), したがって気体のエントロピーは同じだけ増大する. それに反して, 隔壁をたんに取り去るだけのときには, 気体はからの左半分に拡散し, 体積は V に増大する――つまりエントロピーは, なんら補償されることなく, $M\kappa \ln 2$ だけ増大する. それゆえこの過程は非可逆であり, エントロピーは系のまったく力学的な時間的発展の過程（すなわち拡散）で増大したのである. なぜわれわれの理論は同様な結果を与えないのであろうか?

$M=1$ とおいたときに事情はもっとも明白になる. このような分子1個の気体に対してもなお熱力学は成り立つのであり, その体積が2倍になれば, エントロピーが $\kappa \ln 2$ だけ増大するということは正しい. しかしながら, この違い $\kappa \ln 2$ が実際に生ずるのは, ただ分子についてそれが体積 $V/2$ にある, あるいはVにあるということ以上には, 本当になにも知らない限りにおいてのみである. たとえばこの分子が体積Vにあるとき, なおそれが容器の真中より右あるいは左にあることがわかっておれば, 隔壁を真中に挿入し, それを左あるいは右方の容器の端にまで等温可逆的に分子によって押しやらせれば事がすむ. そのさい力学的な仕事 $\kappa T \ln 2$ が費される. すなわち, これだけのエネルギーが熱だめから取り去られる. このようにして, 最後には分子はふたたび体積Vにあるが, しかしわれわれはもはやそれが真中より右に, あるいは左にあるかを知らない. しかしそのかわりに, それを補償するエントロピーの減少 $\kappa \ln 2$ が（熱だめのなかに）生ずる. すなわち, われわれは, われわれの知識をエントロピー減少と交換したのである[202]. すなわち, もし容器のどちらの半分に分子があるかが知られておれば, エントロピーは体積Vにおいても, 体積 $V/2$ におけるものと等しい. したがってもし拡散のまえに分子（の位置と運動量）が正確に知られたならば, 拡散後のいかなる瞬間においても, それが右あるいは左半分にあるかどうかを計算することができる. すなわちエントロピーはまったく増大しなかったのである. 体積が以前に $V/2$ であったという巨視的な指定だけを利用できるときにのみ, エントロピーは拡散にさいして実際

202) L. Szilárd は（上掲の注 194)), $\kappa \ln 2$ よりも少ないエントロピー増大を補償にしてこの知識を手に入れることはできない, ということを示している――一般に $\kappa \ln 2$ は対立する2つの場合のどちらが生ずるかという知識の"熱力学的な値"である. ――容器のどちらの半分に分子があるかわからないときに, うえに述べた過程を遂行しようとするあらゆる試みは, ある場合には非常に複雑な自働装置を考えることに通ずるが, それは根拠のないものであることが証明される.

に増大するのである.

したがって，すべての座標と運動量を知っている古典論的観測者にとっては，エントロピーは一定であり，しかも Boltzmann の“複合の数”が1であるから，それは0に等しい（上掲の注 120）をみよ）: この事情は，われわれの理論における状態 $U=P_{[\varphi]}$ の場合とまったく同様である．事実この場合は系にかんする観測者の知識の可能な最高度の段階に対応するのであるから．

したがってエントロピーの時間的な変化は，観測者が原理的に測定可能なことのすべてを知らない，あるいは調べる（測定する）ことができない，ということに起因する．彼の感覚は，いわゆる巨視的な量を知覚することだけを許す．しかしはじめに述べたみかけの矛盾をこのように説明することは，われわれに1つの義務を課する．それは，量子力学的集団に対して古典論の巨視的なエントロピーに正確に相当するもの，すなわち，あらゆる量を測定することができず，ただいくつかの特別な量だけを，しかも場合によっては，これらの量も限られた精度でもってのみ，測定することができるような観測者から見たエントロピーを見出すことである．

III. 3 でわれわれは，限られた精度をもつすべての測定を，その量の函数であって点スペクトルをもつ他の量の絶対的に精確な測定によって代用することができることを知った．いま $\mathfrak{R}$ をこのような量とし，Rをその作用素，$\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}, \cdots\cdots$ をそれの固有値のなかでたがいに異ったものとする．そうすると $\mathfrak{R}$ の測定はつぎの質問に答えることに同等である: “$\mathfrak{R}=\lambda^{(1)}$ であるか?,” “$\mathfrak{R}=\lambda^{(2)}$ であるか?”…….　いかにもわれわれはまた直さいに，こういうこともできる: 作用素 S をもつ $\mathfrak{S}$ が，限られた精確さで測られる，たとえば，それがどの区間 $c_{n-1}<\lambda\leqq c_n$ $(\cdots\cdots c_{-2}<c_{-1}<c_0<c_1<c_2<\cdots\cdots, n\to+\infty$ あるいは $-\infty$ のとき $c_n\to+\infty$ あるいは $-\infty)$ にあるかが決定されるとするならば，“$\mathfrak{S}$ は $c_{n-1}<\lambda\leqq c_n$ にあるか?,” $n=0, \pm1, \pm2, \cdots\cdots$ という質問すべてに答えることが問題なのである．

ところでこのような質問は，III. 5 によると，ある射影作用素Eに対応しており，それの量 $\mathfrak{E}$（これはただ2つの値 0, 1 しかとらない）が本来測られるべきものである．われわれの例では，$\mathfrak{E}$ はそれぞれ函数　$F_n(\mathfrak{R})$, $n=1, 2, \cdots\cdots$ ただし，

$$F_n(\lambda)\begin{cases}=1, & \lambda=\lambda^{(n)} \text{ のとき,}\\ =0, & \text{その他のとき.}\end{cases}$$

あるいは函数 $G_n(\mathfrak{S})$, $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots$ ただし

$$G_n(\lambda)\begin{cases}=1, & c_{n-1}<\lambda\leqq c_n \text{ のとき},\\ =0, & \text{その他のとき},\end{cases}$$

である――そしてEに対応するのは $F_n(R)$ あるいは $G_n(S)$ である．したがって，到達できる測定の精度も含めて巨視的に測定可能な量 $\mathfrak{S}$ を与えるかわりに，巨視的な測定によって答えられる質問 $\mathfrak{E}$，およびそれの射影作用素Eを与えることもできる（III. 5 をみよ）．これはまさしく巨視的観測者の特徴づけにほかならない：つまりかれのEを指定することである（古典論では巨視的観測者はたとえば，かれが気体の体積 1 cm³ ごとに温度と圧力を――場合によりある限られた精度でもって――測定することができるが，それ以上はなにも測定できないということによって，特徴づけられるであろう）[203]．

さて，巨視的測定にとって本質的なことは，総じて測定可能なものはすべて同時に測定可能でもある――すなわち，すべての巨視的に答えることができる質問 $\mathfrak{E}$ は同時に答えられる，すなわちEはすべておたがいに交換可能であるということである．まさにそれだからこそ，量子力学的な量の同時に観測可能でないことが始めはあれほど逆理的な印象を与えたのであった．というのは，このような概念は巨視的な観察の様式にとって異質的だからである．この点は原理的に非常に重要であるから，いま少しくわしく論議するのが適切であろう．

同時に測定可能でないことが明らかな2つの量，たとえば座標qと運動量p（III. 4 をみよ）とを限られた精度でもって一度に測定する方法を思い浮かべてみよう．平均の測定誤差をそれぞれ $\varepsilon,\ \eta$ とする（不確定性関係によって$\varepsilon\eta\sim h$ である）．III. 4 の議論は，このような精度に対する要求のもとでは同時測定が実際に可能であることを明らかにした：q-（座標の）測定はあまり短かすぎない波長の光で，p-（運動量の）測定はあまり長すぎない波長の光でもって行われる．万事うまくととのえられるならば，実際の測定は2つの光量子をなんらかの方法で検出する，たとえば写真にとるということで行われる．その2つの光量子のうちの1つは q-測定のときにコンプトン効果によって曲げられた光量子であり，他はドップラー効果を用いたp-測定のさいに反射され，その振動数を変え，そしてそれからその振動数を調べるために光学装置（プリズム，回折格子）によって曲げられた光量子である．したがって実験の終りには，2

203）巨視的観測者のこのような特徴づけは E. Wigner に始まる．

つの光量子あるいはただ2つの写真乾板があり，われわれは光量子の方向，あるいは乾板上の感光した場所から，q および p を計算しなければならない．しかしここで強調すべきことは，問題の2つの方向，あるいは感光した場所を任意に精確に決定することをなにものもさまたげないが——というのは，これらはあきらかに同時に観測可能な量であるから（2 つの異った対象の運動量あるいは座標なのである）——，しかし，q および p の測定にとってはこのことはあまり役に立たない，ということである．なぜならば，III. 4 で明らかにされたように，これらの量と q および p との結合は，q および p に対してちょうど不確定さ ε, η が（たとえうえの量を完全に精確に知ったときでも）残存し，しかもどうしても $\varepsilon\eta \ll h$ とすることができないような具合になっているからである．

そこで上述の2つの方向あるいは感光場所自身を物理量として導入し，その作用素を Q', P' とよぶことにすれば，つぎのことがわかる：Q', P' はまったく精確に交換可能であるが，しかしそれらを用いて q, p に属する作用素 Q, P を，それぞれ ε, η よりも高い精確さでもって表わすことはできない．Q', P' に属する量を q', p' とする：q, p 自体ではなく，q', p' が実際に巨視的に測定することができる量であるという解釈は，非常に理に適っている（事実 q', p' が測定されるのだ!）．しかもそれは，すべての巨視的な量の同時測定可能性というわれわれの要請に合致している．

こうして確認したことを一般に巨視的な観察方法の1つの特徴と解するのがよい．それによれば巨視的観察方法は，通例たがいに交換可能でないすべての可能な作用素 $A, B, C, \cdots\cdots$ を近似的にそれらの函数であるような他の作用素，$A', B', C', \cdots\cdots$ によっておきかえることから成り立っている．この A', B', C', の函数を同様に $A', B', C' \cdots\cdots$ と表わすことができるから，このことをまたつぎのようにいうことも許される：$A', B', C', \cdots\cdots$ は $A, B, C, \cdots\cdots$ の近似であるが，おたがいにげんみつに交換可能である．作用素 $A'-A$, $B'-B$, $C'-C, \cdots\cdots$ の属する量に対して，それぞれ数 $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C, \cdots\cdots$ が目安を与えるとすれば，$\varepsilon_A\varepsilon_B$ が $AB-BA$（これは一般には $\neq 0$ である）の大きさの程度を与える．等々，ということがわかる——これは到達できる近似の限界を与えてくれる．もちろん，すでに作用素 $A, B, C, \cdots\cdots$ をえらぶさいに，それらの属する物理量が少くともかなりな近似で巨視的にとらえられるようなものに限定するのが賢明である．

このまったく定性的な議論は，それがなんらかの数学的に実行しうることを要求しているのだ，ということを示しえない限りは，空虚な計画に止まる．そのためにわれわれは，特徴的な場合 Q, P に対してうえに特徴づけた Q', P' が存在するかどうかという問題を，純粋に数学的によりくわしく議論しようと思う．そこで $\varepsilon\eta=h/4\pi$ であるような2つの正の数 ε, η が与えられたとしよう．われわれは2つの交換可能な Q', P' を求め，$Q'-Q, P'-P$ が（なお以下でもっとくわしく定義される意味において）それぞれ ε, η 程度の大きさであるようにする．

われわれはこれを，まったく精確に測定できる量 q', p' を用いて行う，すなわち Q', P' は純粋な点スペクトルをもたなくてはならない．それらは交換可能であるから， 両者の共通な固有函数からなる規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ がある（II. 10 をみよ）．Q', P' の対応する固有値をそれぞれ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ および $b_1, b_2, \cdots\cdots$ とする．したがって

$$Q'=\sum_{n=1}^{\infty}a_nP_{[\varphi_n]},\quad P'=\sum_{n=1}^{\infty}b_nP_{[\varphi_n]}.$$

それらの測定は，そのあとで状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ のうちの1つが生ずるように行われるであろう（たとえば，その作用素Rが固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ およびまったく異った固有値 $c_1, c_2, \cdots\cdots$ をもつような量 $\mathfrak{R}$ を測定する．そうすると Q', P' はRの函数である）．Q', P' の測定が近似的に Q およびPの測定を包含していることは，明らかにつぎのことを意味する：状態 φ_n において Q, P は近似的にそれぞれ Q', P' の値，つまり a_n, b_n によって表わされる，すなわちそれらの，この値のまわりの分散は小さい．これらの分散は量 $(q-a_n)^2, (p-b_n)^2$ の期待値である．すなわち，

$$\begin{aligned}((Q-a_n1)^2\varphi_n, \varphi_n)&=\|(Q-a_n1)\varphi_n\|^2\\&=\|Q\varphi_n-a_n\varphi_n\|^2,\\((P-b_n1)^2\varphi_n, \varphi_n)&=\|(P-b_n1)\varphi_n\|^2,\\&=\|P\varphi_n-b_n\varphi_n\|^2.\end{aligned}$$

それらは，Q' とQの，および P' とP の差の2乗に対する目安である．すなわちそれらは，だいたい ε^2 あるいは η^2 でなければならない，したがってわれわれは

$$\|Q\varphi_n-a_n\varphi_n\|\lesssim\varepsilon,\quad \|P\varphi_n-b_n\varphi_n\|\lesssim\eta,$$

を要求する．それゆえ，Q', P' を問題にするかわりに，$a_1, a_2, \cdots\cdots$, および $b_1,$

$b_2, \cdots\cdots$ を適当にえらんだときにうえの不等式が成り立つような，規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ だけを求めるのが都合がよい．

適当な a, b をとれば，

$$\|Q\varphi-a\varphi\|=\varepsilon,\quad \|P\varphi-b\varphi\|=\eta$$

が成り立つような個々の φ ($\|\varphi\|=1$) は，III.4 で知られている：

$$\varphi_{\rho,\sigma,\gamma}=\varphi_{\rho,\sigma,\gamma}(q)\equiv\left(\frac{2\gamma}{h}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\pi\gamma}{h}(q-\sigma)^2+\frac{2\pi\rho}{h}iq}.$$

ただしここで，$\varepsilon\eta=h/4\pi$ によって，ふたたび

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{h\gamma}{4\pi}},\quad \eta=\sqrt{\frac{h}{4\pi\gamma}}$$

とおいた（すなわち $\gamma=\varepsilon/\eta$）．そして $a=\sigma$，$b=\rho$ ととらなければならない．ところでこの $\varphi_{\rho,\sigma,\gamma}$ から規格化された完全直交系が作られることが必要である．ρ は Q の，そして σ は P の期待値であるから，ρ, σ がそれぞれ独立にある数列の数を順々にとり，しかも第1の数列の密度がおよそ ε であり，第2の数列の密度がおよそ η であるようにするのがもっともらしく思われる．実際，$2\sqrt{\pi}\cdot\varepsilon=\sqrt{h\gamma}$ および $2\sqrt{\pi}\cdot\eta=\sqrt{\frac{h}{\gamma}}$ という単位をえらぶこと，すなわち

$$\rho=\sqrt{h\gamma}\cdot\mu,\quad \sigma=\sqrt{\frac{h}{\gamma}}\nu \qquad (\mu,\nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

ととるのが便利であることが示される．したがって

$$\psi_{\mu,\nu}=\varphi_{\sqrt{h\gamma}\mu,\ \sqrt{\frac{h}{\gamma}}\nu,\ \gamma} \qquad (\mu,\ \nu=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots\cdots)$$

は φ_n ($n=1, 2, \cdots\cdots$) に対応する．1個の n のかわりに2つの指標 μ, ν があることが本質的でないのは明らかである．

しかしまだこの $\psi_{\mu,\nu}$ は直交しない（それらは規格化されており，

$$\|Q\psi_{\mu,\nu}-\sqrt{h\gamma}\cdot\mu\|=\varepsilon,\quad \|P\psi_{\mu,\nu}-\sqrt{\frac{h}{\gamma}}\nu\|=\eta$$

が成り立っている）．それらを E. Schmidt の手続きにしたがって（なんらかの順番で）"直交化する" ならば（II.2 定理8の証明をみよ），それによって生じた規格化された直交系 $\psi_{\mu,\nu}$ に対して特別な困難なしに完全性を証明することができる．また不等式

$$\|Q\psi_{\mu,\nu}-\sqrt{h\gamma}\mu\|\leqq C\varepsilon,\quad \|P\psi_{\mu,\nu}-\sqrt{\frac{h}{\gamma}}\nu\|\leqq C\eta$$

も確められる．そのさいCの値は~ 60である（この値は，恐らくなおかなり低くとれるであろう）．これの証明は冗長ではあるがなんら新しい観点を必要としない計算に導くが，それは省略する．$C\sim 60$という因子はたいして重要ではない．というのは，$\varepsilon\eta=\frac{h}{4\pi}$が巨視的な（CGS-）単位で測れば，まったく法外に小さいからである（約10^{-28}!）．

したがって以上をまとめて，すべての巨視的作用素の交換可能性を，したがってとりわけうえに導入した巨視的な射影作用素Eの交換可能性を仮定することが理由づけられる，ということができる．

Eはすべての巨視的に答えることができる質問 $\mathfrak{E}$ に，いいかえると，問題にしている系に関係し，しかも巨視的に行うことができるようなすべての，場合の決定に対応する．われわれがみたように，それらはすべて交換可能であり III. 5 にしたがえばEとともに$1-E$も，さらにE, Fとともに，またEF, $E+F-EF$, $E-EF$もそれらに属する．それらは有限個しかないと仮定するのが当然である．それらを$E_1, \cdots\cdots, E_n$としよう．しばらくのあいだ，$E^{(+)}=E$, $E^{(-)}=1-E$という表し方を導入し，2^n個の積

$$E_1^{(s_1)}\cdots\cdots E_n^{(s_n)}\qquad (s_1, \cdots\cdots, s_n=\pm 1)$$

のすべてを考察しよう．それらのうちの異った2つのものの積はすべて0である：なぜならば$E_1^{(s_1)}\cdots\cdots E_n^{(s_n)}$と$E_1^{(t_1)}\cdots\cdots E_n^{(t_n)}$が2つの異ったものであり，たとえば$s_\nu\neq t_\nu$であれば，それらの積には$E_\nu^{(s_\nu)}$, $E_\nu^{(t_\nu)}$という因子が現われる．すなわち$E_\nu^{(+)}=E$および$E_\nu^{(-)}=1-E$であるが，それらの積は0である．各E_νはいくつかの，このような積の和である：つまり

$$E_\nu=\sum_{s_1,\cdots\cdots,s_{\nu-1},s_{\nu+1},\cdots\cdots,s_n=\pm 1} E_1^{(s_1)}\cdots\cdots E_{\nu-1}^{(s_{\nu-1})}\cdot E_\nu^{(+)}\cdot E_{\nu+1}^{(s_{\nu+1})}\cdots\cdots E_n^{(s_n)}$$

である．これらの積のうちで0とことなるものを$E_1', \cdots\cdots, E_m'$となづけよう（明らかに$m\leqq 2^n$であるが，それどころか，$E_1', \cdots\cdots, E_m'$は$E_1, \cdots\cdots, E_n$のうちのどれかであり，しかも$\neq 0$であるから，$m\leqq n-1$でなければならない）．そうすると，

$$E_\mu'\neq 0,\quad E_\mu' E_\nu'=0,\qquad \mu\neq\nu \text{ に対して}$$

であり，各E_μはいくつかのE_ν'の和である（なお，この最後のことから$n=2^m$がわかる）．注意しなければならないのは，

$$E_\mu=0,\ E_\nu=E_\rho' \text{ あるいは } E_\mu=E_\rho',\ E_\nu=0$$

でなければ，けっして

$$E_\mu+E_\nu=E_\rho'$$

となることはありえないということである．なぜなら，もしそうでなければ，E_μ, E_ν はいくつかの E_π' の和であり，したがって E_ρ' は2つ以上の E_π' の和であるだろう（場合によってはくり返しを用いて)．II.4 定理 *15*, *16* によると，これらの E_π' はすべてたがいに異っており，2つ以上あるのだからまた E_ρ' とも異っているだろう――それゆえそれらと E_ρ' との積は 0，したがってまたそれらの和と E_ρ' との積も0である．このことは，それらの和が E_ρ' であるはずだということと矛盾する．

したがって，$E_1', \cdots\cdots, E_m'$ に対応する性質 $\mathfrak{E}_1', \cdots\cdots, \mathfrak{E}_m'$ はつぎのような種類の巨視的な性質である：どれも背理ではない．どの2つをとっても，たがいに排反する．あらゆる巨視的性質はそれらのいくつかにかかわる選言命題によって生ずる．それらのなかのどれも選言によって2つのより詳細な巨視的性質に分解されることはできない．したがって $\mathfrak{E}_1', \cdots\cdots, \mathfrak{E}_m'$ は，総じて巨視的に行うことができる場合の決定のもっとも詳細なものである．それらは巨視的には分解できない．

以下では，それらの数が有限であることを要求せず，ただ巨視的に分解できない性質，$\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_2', \cdots\cdots$ の存在だけを要求する．それらの射影作用素を E_1', $E_2', \cdots\cdots$ としよう．ふたたびそれらはすべて $\neq 0$ であり，どの2つをとっても直交し，任意の巨視的なEはそれらのうちのいくつかの和である．

したがってまた1もそれらのうちのいくつかの和であるが，ある E_ν' がそのなかにないとすると，それはこれらに，したがって1に直交する．したがって

$$E_\nu'=E_\nu'\cdot 1=0$$

ということになるが，これはありえない．したがって

$$E_1'+E_2'+\cdots\cdots=1$$

である．肩のダッシュを落して，$\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2\cdots\cdots$ および $E_1, E_2, \cdots$ と書くことにしよう．それらに属する閉じた線型多様体を $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$ とよび，それらの次元数を $s_1, s_2, \cdots\cdots$ とする．

もし $s_n=1$，つまり $\mathfrak{M}_n$ が1次元であるならば，

$$\mathfrak{M}_n=[\varphi_n],\quad E_n=P_{[\varphi_n]}$$

であり，また $E_1+E_2+\cdots\cdots=1$ のために，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は1つの規格化され

た完全直交系を作るであろう．これは，すでに巨視的な測定が，考察している系の状態の完全な決定を可能にすることを意味するであろう．そんなことは普通には起らないから，一般には $s_n>1$，いやそれどころか $s_n\gg 1$ であるだろう．

ついでに注意しておきたいことは，世界の巨視的な記述の基本的な素材であるところの E_n が，古典論でよく使われる位相空間を細胞に分割する方法に，ある意味で対応しているということである．E_n が交換可能でない作用素のふるまいを，とくに位相空間にとって非常に重要な Q, P のふるまいを近似的に反映しうることは，すでにわれわれのみてきたところである．

さて，分解できない射影作用素 $E_1, E_2, \cdots\cdots$ をもつ巨視的な観測者にとって，混合 U はいかなるエントロピーをもつのであるか？ あるいはもっと正確にいうと，このような観測者は，U から V への変化にさいして最大どれだけのエントロピーをうることができるか？ ——いいかえると，$U\rightarrow V$ への移行の補償として，かれは高々どれだけのエントロピー減少（それはもちろん場合によって $\gtreqless 0$ となりうる）を外部の物体に作り出すことが可能であるか？

まず，第1にかれは，すべての $E_1, E_2, \cdots\cdots$ が同じ期待値をもつ，すなわち

$$\mathrm{Spur}(UE_n)=\mathrm{Spur}(U'E_n) \qquad (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

であるような2つの集団を，たがいに区別することができない，ということを指摘しなければならない．なるほどある時間がたてば，かれはそれらを見分けることができる．というのは U, U' が **2.** にしたがって変化し，

$$\mathrm{Spur}(AUA^{-1}E_n)=\mathrm{Spur}(AU'A^{-1}E_n)$$

がもはや成り立たなくなるはずであるから[204]．ただし，$A=e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}$． ——しかしながら，われわれはただちに遂行できる測定だけを考察しているのである．であるから，うえの条件のもとでは，U, U' を識別不可能とみなしてもよい．さらにまたかれは，若干の E_n の φ を通過させ，残りのものをそのまま反射するような半透壁だけを使うことができる．さて V.2 の方法を用いれば，たや

204） E_n が H と，したがって A と交換可能であるときには，

$$\mathrm{Spur}(A\cdot UA^{-1}E_n)=\mathrm{Spur}(UA^{-1}E_nA)=\mathrm{Spur}(UA^{-1}AE_n)$$
$$=\mathrm{Spur}(UE_n)$$

のために，等式が成り立つ．しかしすべての E_n すなわちすべての巨視的に観測される量は，決して皆が皆 H と交換可能ではない：多くの量，たとえば拡散のさいに気体の重心は t とともに顕著に変化する，つまり $\mathrm{Spur}(UE_n)$ は一定でない． ——すべての巨視的な量は交換可能であるから，H はけっして巨視的な量でない．すなわちエネルギーは巨視的に完全に精確に測定されるものではない．これは，もともとうなづける．

すくなっとくできるように，

$$U'=\sum_{n=1}^{\infty}x_nE_n \text{ を } V'=\sum_{n=1}^{\infty}y_nE_n$$

に可逆的に移向させるにはこれで十分であり，したがってエントロピーの差はやはり

$$\kappa\,\mathrm{Spur}(U'\ln U')-\kappa\,\mathrm{Spur}(V'\ln V')$$

である，すなわち，このような U' のエントロピーは

$$-\kappa\,\mathrm{Spur}(U'\ln U')$$

に等しい．もちろん注意すべきことは，$\mathrm{Spur}\,U'=1$ であるような U' が一般に存在するためには，$\mathrm{Spur}\,E_n$，すなわち数 s_n が有限でなければならないことである．U' は s_1 重の固有値 x_1, s_2 重の固有値 x_2, ……，をもつから，$-U'\ln U'$ は s_1 重の固有値 $-x_1\ln x_1$, s_2 重の固有値 $-x_2\ln x_2$, …… をもつ．それだから $\mathrm{Spur}\,U'=1$ は

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_nx_n=1$$

を意味し，またエントロピーは

$$-\kappa\sum_{n=1}^{\infty}s_nx_n\ln x_n$$

に等しい．

$$U'E_m=\sum_{n=1}^{\infty}x_nE_nE_m=x_mE_m,$$

$$\mathrm{Spur}(U'E_m)=x_m\,\mathrm{Spur}\,E_m=s_mx_m$$

によって，

$$x_m=\frac{\mathrm{Spur}(U'E_m)}{s_m}$$

であり，したがって求めるエントロピーは

$$-\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Spur}(U'E_n)\ln\frac{\mathrm{Spur}(U'E_n)}{s_n}$$

に等しい．

任意の $U(\mathrm{Spur}\,U=1)$ の場合にも，エントロピーは

$$-\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Spur}(UE_n)\ln\frac{\mathrm{Spur}(UE_n)}{s_n}$$

に等しくなければならない．なぜなら，

$$x_n=\frac{\mathrm{Spur}(UE_n)}{s_n},\quad U'=\sum_{n=1}^{\infty}x_nE_n$$

とおくと $\mathrm{Spur}(UE_n)=\mathrm{Spur}(U'E_n)$ であり，U, U' が区別できないため，それらは同じエントロピーをもつからである．

なおこのエントロピーがつねに普通のものより大きいことを述べておかなければならない：つねに

$$-\kappa\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Spur}(UE_n)\ln\frac{\mathrm{Spur}(UE_n)}{s_n}\geqq-\kappa\,\mathrm{Spur}(U\ln U)$$

であり，等号はただ $U=\sum_{n=1}^{\infty}x_nE_n$ に対してだけ成り立つ．V.3 によるとこれは，過程 *1.* を何回か（必ずしも巨視的でなくてもよい）適用することによって U から

$$U'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Spur}(UE_n)}{s_n}E_n$$

を作ることができれば，たしかに正しい．なぜなら左辺は $-\kappa\,\mathrm{Spur}(U'\ln U')$ であり，また $U=\sum_{n=1}^{\infty}x_nE_n$ は $U=U'$ と同じことを意味するからである．E_n に属する閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}_n$ を張る規格化された直交系 $\varphi_1^{(n)},\cdots\cdots,\varphi_{s_n}^{(n)}$ をとろう．$\sum_{n=1}^{\infty}E_n=1$ のためにすべての $\varphi_\nu^{(n)}$ $(n=1,\ 2,\cdots\cdots,\nu=1,\cdots\cdots,s_n)$ は１つの規格化された完全直交系を作る．R を，その（まったく異った固有値をもつ）固有函数が $\varphi_\nu^{(n)}$ であるような作用素とし，$\mathfrak{R}$ をその物理量とする．$\mathfrak{R}$ の測定によってUは *1.* にしたがって

$$U''=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{s_n}(U\varphi_\nu^{(n)},\ \varphi_\nu^{(n)})\cdot P_{[\varphi_\nu^{(n)}]}$$

となる．そのつぎに

$$\psi_\mu^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{s_n}}\sum_{\nu=1}^{s_n}e^{\frac{2\pi i}{s_n}\mu\nu}\varphi_\nu^{(n)}\qquad(\mu=1,\cdots\cdots,s_n)$$

とおく．$\psi_1^{(n)},\cdots\cdots,\psi_{s_n}^{(n)}$ は $\varphi_1^{(n)},\cdots\cdots\varphi_{s_n}^{(n)}$ と同じ閉じた線型多様体 $\mathfrak{M}_n$ を張る規格化された直交系を作る．したがって　$\psi_\nu^{(n)}$ $(n=1,\ 2,\cdots\cdots,\nu=1,\cdots\cdots,s_n)$ もまた１つの規格化された完全直交系をつくる．でわれわれは，これらを固有函数とする１つの作用素Sを作り，それに属する物理量を $\mathfrak{S}$ とし

よう.

なおつぎの式が成り立つことをたしかめておく：

$$(P_{[\varphi_\nu^{(n)}]}\psi_\mu^{(m)},\ \psi_\mu^{(m)})\begin{cases}=0, & m\neq n \text{ のとき,}\\ =\dfrac{1}{s_n}, & m=n \text{ のとき.}\end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{s_n} P_{[\varphi_\nu^{(n)}]}=\sum_{\nu=1}^{s_n} P_{[\psi_\nu^{(n)}]}=E_n.$$

それゆえ $\mathfrak{S}$ の測定によって U'' は *1.* に従って

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{s_m}(U''\psi_\mu^{(m)},\ \psi_\mu^{(m)})P_{[\psi_\mu^{(m)}]}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{s_m}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{s_n}(U\varphi_\nu^{(n)},\ \varphi_\nu^{(n)})(P_{[\varphi_\nu^{(n)}]}\psi_\mu^{(m)},\ \psi_\mu^{(m)})\Big]P_{[\psi_\mu^{(m)}]}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{s_m}\Big[\sum_{\nu=1}^{s_m}\frac{(U\varphi_\nu^{(m)},\ \varphi_\nu^{(m)})}{s_m}\Big]P_{[\psi_\mu^{(m)}]}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{s_m}\frac{\mathrm{Spur}(UE_m)}{s_m}P_{[\psi_\mu^{(m)}]}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Spur}(UE_m)}{s_m}E_m=U'.$$

このようにして，Uを U' に変えるには2つの過程 *1.* で十分である――そしてこれが証明に要するすべてである.

状態に対するこのエントロピー　($U=P_{[\varphi]}$, $\mathrm{Spur}(UE_n)=(E_n\varphi,\ \varphi)$ $=\|E_n\varphi\|^2$)

$$-\kappa\sum_{\mu=1}^{\infty}\|E_n\varphi\|^2\ln\frac{\|E_n\varphi\|^2}{s_n}$$

は，もはや“微視的な”エントロピーのもつ具合のわるい点をもたない．それは一般に時間的に（すなわち過程 *2.* において）一定ではなく，またすべての状態 $U=P_{[\varphi]}$ に対して0に等しくない．実際に，われわれのエントロピーを作りあげている $\mathrm{Spur}(UE_n)$ が，一般に時間的に一定でないことは，注 204）で論じられた．いかなるときに状態 $U=P_{[\varphi]}$ がエントロピー0をもつかを与えるのは容易である：

$$\frac{\|E_n\varphi\|^2}{s_n}\geqq 0,\ <1$$

であるから，エントロピーの表式におけるすべての加算項

$$\|E_n\varphi\|^2 \ln\frac{\|E_n\varphi\|^2}{s_n}$$

はすべて $\leqq 0$ である．したがって，それらはすべて $=0$ でなければならない．すなわち

$$\frac{\|E_n\varphi\|^2}{s_n}=0,\ 1.$$

第1の場合は $E_n\varphi=0$ を，第2は $\|E_n\varphi\|=\sqrt{s_n}$ を意味する．第2の場合

$$\|E_n\varphi\|\leqq 1,\ s_n\geqq 1$$

であるから，

$$s_n=1,\quad \|E_n\varphi\|=\|\varphi\|,$$

つまり，$E_n\varphi=\varphi$，あるいは $s_n=1$ で φ は $\mathfrak{M}_n$ にある．この最後の事態は，たしかに2つの異ったnに対して成り立つことはできないが，しかしまたどのnに対しても成り立たないということもありえない．というのは，もしそうであればつねに $E_n\varphi=0$ であり，したがって $\sum_{n=1}^{\infty}E_n=1$ のために $\varphi=0$ となるであろう．したがってちょうど1個のnに対してφは $\mathfrak{M}_n$ にあるとすれば，そのさい $s_n=1$ である．われわれは一般にすべての $s_n\gg 1$ であることを確認しているから，これは不可能である．すなわち，われわれのエントロピーはつねに >0 である．

巨視的なエントロピーは時間的に変化するから，つぎに解くべき問題はこうである：この巨視的エントロピーは，現実の世界における現象論的熱力学のエントロピーと同じようにふるまうであろうか，それはおおむね増大するであろうか？ この問題は古典力学の理論においては，いわゆる Boltzmann の H-定理によって肯定的に答えられる．しかしそのさいにある種の統計的な仮定，つまりいわゆる“無秩序の仮定”をおかなければならない[205]．量子力学にお

205) 古典論の H-定理については，Boltzmann: *Vorlesungen über Gastheorie*, Leipzig 1896, ならびに，P および T. Ehrenfest によるきわめて教訓的な議論（上掲の注 185）をみよ．量子力学において Boltzmann の仮定にとってかわることができる“無秩序の仮定”は W. Pauli によって定式化された (Sommerfeld-Festschrift, 1928)．そこで H-定理がその仮定を用いて証明されている．——新たに著者は古典力学のエルゴート定理の証明にも成功した．Proc. Nat. Ac. Dec. 1929 および March 1930 をみよ．同じく G. D. Birkoff による精密化を参照：Proc. Nat. Ac., Dec. 1929 および March 1930.

いては，この種の仮定を設けないで対応する定理を証明することに著者は成功した[206]．この問題ならびにそれと密接に関連しているエルゴード定理（上掲の注 206）をみよ，そこでこの定理も証明された）に，より詳しく立ち入ることは，あまりに長きにわたりすぎるから，これらの研究を再録することはさけなければならない．この方面に関心のある読者は引用した論文を参照されたい．

206) Z. Physik Bd. 57 (1929)

VI. 測 定 の 過 程

1. 問題の定式化

われわれはこれまで，種々異った因果的および統計的な自然記述の方法に対する量子力学の関係を論究してきたが，そのさい量子力学の手続きには独特の2重性があることが見出され，しかもそれは十分解明することができなかったのである．すなわち，われわれの見出したところによれば，一方では状態φはエネルギー作用素 H の影響のもとに，時間間隔 $0 \leqq \tau \leqq t$ のあいだにつぎのようにして状態 φ' へ移る：

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\varphi_\tau = -\frac{2\pi i}{h}\mathrm{H}\varphi_\tau, \qquad (0 \leqq \tau \leqq t)$$

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_t = \varphi',$$

すなわち，

$$\varphi' = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}\varphi$$

となってまったく因果的である．これに応じて混合 U は

$$U' = e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}Ue^{\frac{2\pi i}{h}t\mathrm{H}}$$

に変る．したがって，φから φ' への因果的な変化によって状態 $U = P_{[\varphi]}$ は状態 $U' = P_{[\varphi']}$ へ移る（V. 1 における過程 *2.*）．他方，状態φは，ある測定——すべて単純な固有値と，固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ をもつ量を測る——のさいに，非因果的な変化をうける．それによってすべての状態 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ がそれぞれの確率 $|(\varphi, \varphi_1)|^2, |(\varphi, \varphi_2)|^2, \cdots\cdots$ でもって生ずることができる．すなわち，混合

$$U' = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 P_{[\varphi_n]}$$

が出現する．一般には，混合 U は

$$U' = \sum_{n=1}^{\infty} (U\varphi_n, \varphi_n) \cdot P_{[\varphi_n]}$$

へ移行する（V. 1 における過程 *1.*）．ここでは状態が混合へ移行するから，この過程は因果的でない．

$U \to U'$ の2つの過程の違いはまったく根本的なものである：因果律に対するふるまいの違いを別としても，第1のものが（熱力学的に）可逆であるのに反して，後者はそうでない（V.3 参照）という点でも，それらは異っているのである．

そこで，これらの関係を，自然において，あるいは自然を観測するさいに現実に起ることがらと比較してみよう．第1に，観測すること，あるいは，それに結びついた主観的な知覚の過程は，物理的環境にとって新しいなにか（Wesenheit）であって，これに帰着させることができないということは，それ自体としてはまったく正しい．というのは，主観的な知覚はわれわれを制御のきかない（どんな制御の試みもすでにそれを前提としているから）個人の精神的な内的生活へと導くからである（さきの議論を参照）．しかしながらつぎのいわゆる物心平行論（Prinzip vom psycho-physikalishen Parallelismus）は，科学的世界観にとって基本的な要請である．すなわち，実際は物理外の過程である主観的な知覚過程を，あたかもそれが物理的世界において生じたかのように記述すること，すなわち，その過程の部分を客観的な環境の中の，通常の空間内における物理的過程に対応させることが可能でなければならないということである（もちろん，このような対応をつけるさいに，この過程を，われわれの身体が占めている空間部分のなかの点に位置づける必要がしばしば生ずる．しかし，このことはそれが環境に属することをいささかも変更するものでない）．簡単な例にこの考え方をあてはめるとつぎのようになる：温度を測定するとして，われわれは望むならば，この過程を温度計の水銀だめのまわりの温度がえられるところまでたどっていって，温度計によってこれこれの温度が測定された，ということができる．しかしさらに考察を進めて，分子運動論的に明らかにすることのできる水銀の性質から，それの温度上昇，膨脹およびその結果生じた水銀柱の長さを計算して，これこれの長さが観測者によって見られたということもできる．さらに進むこともできよう．光源を考慮にいれて，不透明な水銀柱のところでの光量子の反射，その後の光量子の眼にはいるまでの進路，そしてレンズによる屈折と網膜上での像の形成を確めてのちはじめて，これこれの像が観測者の網膜によってとらえられたということができる．もしわれわれの生理学上の知識がこんにちよりいっそう正確になれば，さらに進んでこの像が網膜，神経路，および脳のなかにひき起す化学反応を追求し，最後にかれの脳細胞の化学変化が観測者によって知覚された，というふうにいえるように

なるであろう．しかし，われわれの問題にするのが水銀の器までか，温度計の目盛りまでか，網膜までか，あるいは脳までか，ということにかかわりなくいちどは，これこれが観測者によって知覚されたといわなければならないのである．すなわち，われわれはいつでも世界を2つの部分に分けて，一方を観測される系，他方を観測者としなければならないのである．前者においてはすべての物理的過程を（少くとも原理的には）いくらでも精確にたどることができるが，後者ではそのようなことは無意味である．両者のあいだの境い目はきわめて任意であって，うえの例では4つの異った可能性が示されていた．とくに，この意味での観測者はけっして現実の観測者の身体に一致させる必要がない．うえの例では，あるときは温度計までも観測者に含めたし，他のときには観測者の眼や神経路までも観測者に数えなかったのである．この境界を現実の観測者の身体の内部へいくらでも深く移すことができるということが，物心平行論の原理の内容である．しかしこのことは，どんな記述をとるにしても，それが内容空虚でないとき，すなわち経験との比較が可能であるときには，どこかに境界がおかれなければならないということを，なんら変更するものでない．なぜかというと，経験からえられる陳述は，観測者がある定った主観的知覚をしたという型のものであって，ある物理量がある定った値をとったというようなものでないからである．

さて量子力学は，観測される部分が観測する部分と相互作用をしていないかぎり，そのなかで生ずるできごとを過程 *2.* (V. 1) のたすけをかりて記述する．しかしひとたびそのような相互作用が生ずれば，すなわち測定が行われれば，過程 *1.* を適用しなければならない，と量子力学は教える．こうして2重性は正当化されたのである[207]．しかし，観測される系と観測者とのあいだの境界をうえの意味で任意に移動させることができるということが証明されないかぎり，物心平行論の原理が破れるおそれがある．

これを論ずるために世界を3つの部分 *I*, *II*, *III* に分ける．*I* は本来の観測される系，*II* は測定装置，*III* は本来の観測者である[208]．証明すべきこと

---

207) N. Bohr; Naturwiss. Bd. 17 (1929) は，はじめて，量子力学によって形式的な面でさけられなくなった自然記述の2重性が，事実に即して正当化されるということ，および物心平行論の原理との関係を示した．

208) 以下で展開する議論は，VI. 3 におけるのと同じく，本質的な部分においては著者と L. Szilárd 氏との討論に負うものである．また Heisenberg の上掲注 181) における同様の考察を参照せよ．

は，境界は I と $II+III$ とのあいだにも，また $I+II$ と III とのあいだにもおくとができるということである．（われわれのうえの例で，第1および第2の場合を比較するには，I は調べるべき系，II は温度計，III は光＋観測者である．第2と第3の比較のさいには，I は調べるべき系＋温度計，II は光＋観測者の眼，III は観測者の網膜から先；第3と第4の比較のさいには，I は観測者の網膜にいたるまでの全体，II はかれの網膜，神経路および脳，III はかれの抽象的な „自我” である.）すなわち，一方では **2.** を I に，**1.** を I と $II+III$ とのあいだの相互作用に適用し，他方では **2.** を $I+II$ に，**1.** を $I+II$ と III とのあいだの相互作用に適用するのである．（III 自身はどちらの場合にも考慮のそとにおかれる.）そしてどちらのやり方をしても，I に対しては同一の陳述がえられるということの証明が（I が，そしてこれだけがどちらの場合にも世界の観測される部分に属する），われわれの本来の問題である．しかしこの問題に有効にとりくむことができるためには，まず2つの物理系を1つに結びつける過程（これによって I と II が $I+II$ になる）をもっと詳しく調べなければならない．

2. 合　成　系

前節の終りで予告しておいたように，2つの物理系 I, II（これらがまえに与えたような意味をもつ必要はない）とそれらの合成系 $I+II$ とを考察する．古典力学的な記述方法で I は k 個の自由度，したがって座標，$q_1, \cdots\cdots, q_k$——簡単のためつねに記号 q でおきかえることにする——をもつとする．同じく II は l 個の自由度と座標 $r_1, \cdots\cdots, r_l$ をもつとし，これを r と省略する．そうすれば $I+II$ は $k+l$ 個の自由度と，座標 $q_1, \cdots\cdots, q_k, r_1, \cdots\cdots, r_l$ 簡略して q, r をもつ．したがって量子力学では，I の波動函数の形は $\varphi(q)$, II のそれは $\xi(r)$, $I+II$ のそれは $\Phi(q, r)$ という形をもつ．それぞれに対応するヒルベルト空間 $\Re^I$, $\Re^{II}$, $\Re^{I+II}$ のなかの内積は，

$$\int \varphi(q)\overline{\psi}(q)dq, \quad \int \xi(r)\overline{\eta}(r)dr,$$
$$\iint \Phi(q, r)\overline{\Psi}(q, r)dqdr$$

によって定義される．$I, II, I+II$ の物理量には，それぞれ $\Re^I$, $\Re^{II}$, $\Re^{I+II}$ における超極大エルミート作用素 A, A, $\boldsymbol{A}$ が対応する．

I におけるすべての物理量はもちろん $I+II$ における物理量でもある．そし

てそれらに対する $\mathbf{A}$ はその A からつぎのようにしてえられる．$\mathbf{A}\Phi(q, r)$ をえるには，r を定数とみなし，A を q の函数 $\Phi(q, r)$ に適用する[209]．この対応規則はいずれにせよ座標および運動量の作用素（$Q_1, \cdots\cdots, Q_k$ および $P_1, \cdots\cdots, P_k$ すなわち

$$q_1, \cdots\cdots, q_k, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_1}, \cdots\cdots, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q_k},$$

I. 2. をみよ）に対して正しく，しかも IV. 2. の対応づけの原則 ***I.***, ***II.*** に合致している[210]．それでこれを一般的な要請としておく（それは量子力学において一般に慣用される）.

同様に II における各物理量は $I+II$ においても物理量であり，それらの A は同じ規則によって $\mathbf{A}$ を与える：$\mathbf{A}\Phi(q, r)$ は，q を定数として $\Phi(q, r)$ を r だけの函数とみなしたときの $A\Phi(q, r)$ に等しい.

$\varphi_m(q)$ $(m=1, 2, \cdots\cdots)$ を $\Re^I$ における規格化された完全直交系とし，$\xi_n(r)$ $(n=1, 2, , \cdots\cdots)$ を $\Re^{II}$ におけるそれとすれば，

$$\Phi_{m/n}(q, r)=\varphi_m(q)\xi_n(r) \quad (m, n=1, 2, \cdots\cdots)$$

は明らかに $\Re^{I+II}$ における規格化された完全直交系である．したがって作用素 A, A, $\mathbf{A}$ はそれぞれ

$$\{\mathsf{a}_{m/m'}\}, \{a_{n/n'}\}, \{\alpha_{mn/m'n'}\} \qquad (m, n', n, n'=1, 2, \cdots\cdots)$$

という行列で表現される[211]．これは以下でしばしば用いる.

行列表現の意味は

$$\mathsf{A}\varphi_m(q)=\sum_{m'=1}^{\infty}\mathsf{a}_{m/m'}\varphi_{m'}(q), \quad A\xi_n(r)=\sum_{n'=1}^{\infty}a_{n/n'}\xi_{n'}(r).$$

および

$$\mathbf{A}\Phi_{mn}(q, r)=\sum_{m'n'=1}^{\infty}\alpha_{mn/m'n'}\Phi_{m'n'}(q, r),$$

すなわち，

$$\mathbf{A}\varphi_m(q)\xi_n(r)=\sum_{m'n'=1}^{\infty}\alpha_{mn/m'n'}\varphi_{m'}(q)\xi_{n'}(r)$$

209） A とともに $\mathbf{A}$ もまたエルミートまたは超極大であることは容易に示される.

210） ***I*** については明らか，***II*** についても多項式だけが問題になるかぎりは同様である．一般の函数の場合には，単位の分解およびエルミート作用素がいっしょだということは $\mathsf{A}\to\mathbf{A}$ の移行によって害われないということから確められる.

211） そえ字の数が多く，また種々のものがでてくるので，これまでのとは少し異なる行列の書き方をする.

である．とくに A→**A** という対応は

$$\mathbf{A}\varphi_m(q)\xi_n(r)=(\mathsf{A}\varphi_m(q))\xi_n(r)=\sum_{m'=1}^{\infty}\mathsf{a}_{m/m'}\varphi_{m'}(q)\xi_n(r),$$

すなわち，

$$\alpha_{mn/m'n'}=\mathsf{a}_{m/m'}\delta_{n/n'}\quad\left(\delta_{n/n'}\begin{cases}=1, & n=n' \text{ に対して}\\ =0, & n\neq n' \text{ に対して}\end{cases}\right)$$

を意味する．同様に対応 $A\to\mathbf{A}$ も

$$\alpha_{mn/m'n'}=\mathsf{a}_{n/n'}\delta_{m/m'}$$

を意味する．

$I+II$ における統計集団は，それの統計作用素 U またはそれの行列 $\{v_{mn/m'n'}\}$ によって表わされる[211]．これは $I+II$ のなかのすべての量の統計的な性質を決定するから，とりわけ I の量の統計的性質もこれによってきまる．したがって，それは I だけにおける統計集団にも対応する：実際，I だけを知覚し II は知覚できないような観測者は系 $I+II$ の集団を系 I の集団として把握するであろう．それでは，このような I の集団に属する統計作用素 U あるいはそれの行列 $\{\mathsf{u}_{m/m'}\}$ は何であろうか？ それはつぎのように決定される：行列 $\{\mathsf{a}_{m/m'}\}$ をもつ I の量は，$I+II$ の量としては行列 $\{\mathsf{a}_{m/m'}\delta_{n/n'}\}$ をもつから，それの期待値は，I における計算によっては

$$\sum_{mm'=1}^{\infty}\mathsf{u}_{m/m'}\mathsf{a}_{m'/m}$$

となり，$I+II$ における計算では

$$\sum_{mnm'n'=1}^{\infty}v_{mn/m'n'}\mathsf{a}_{m'/m}\delta_{n'/n}=\sum_{mm\ n=1}^{\infty}v_{mn/m'n}\mathsf{a}_{m'/m}$$
$$=\sum_{mm'=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn/m'n}\right)\mathsf{a}_{m'/m}$$

を与える．2つの表式が等しいためには

$$\mathsf{u}_{m/m'}=\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn/m'n}$$

でなければならない．

II だけを顧慮して I を無視するときにも，まったく対応的に，$I+II$ の集団から，統計作用素 U とその行列 $(u_{n/n'})$ をもつ II の集団が決定される．その結果まえと類似の

$$u_{n/n'}=\sum_{m=1}^{\infty}v_{mn/mn'}$$

がえられる.

こうして I, II, $I+II$ の統計作用素，すなわち U, U, $\mathbf{U}$ に対しても対応規則がえられたのであるが，それは物理量の作用素 A, A, $\mathbf{A}$ に対する対応規則とは本質的に異っている.

なお，われわれの U, U, $\mathbf{U}$ の対応づけは，規格化された完全直交系 $\varphi_m(q)$, $\xi_n(q)$ の選び方に依存しているようにみえるが，それは見かけだけにすぎないことをいっておかなければならない．なぜかというと，この規則は不変な条件（それはこの対応によってのみ満足される），すなわち A と $\mathbf{A}$，あるいは A と $\mathbf{A}$ の期待値が一致することから導かれたからである.

$\mathbf{U}$ は $I+II$ における統計を表わし，U あるいは U はそれぞれ I または II だけに限られた統計を表わす．そこで，U, U は $\mathbf{U}$ を一義的に決定するであろうか? という問題が生ずる．一般に人々は否定的な答えを期待するであろう．というのは，U と U との知識，すなわち分離された系 I および II の知識だけでは，2つの系のあいだに生じうる“確率の依存性”がすべてぬけ落ちてしまうからである．しかし，I の状態も II の状態も正確にわかっているときには“確率の依存性”は問題にならず，$I+II$ も正確に知れる．だが，このような定性的な話より厳密な数学的議論をとるべきであるから，そちらへ移ることにする.

問題はこうである：与えられた 2 つの定符号行列 $\{\mathrm{u}_{m/m'}\}$ および $\{u_{n/n'}\}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{mn/m'n}=\mathrm{u}_{m/m'},\quad \sum_{m=1}^{\infty}v_{mn/mn'}=u_{n/n'}$$

となるような第3の定符号行列 $\{v_{mn/m'n'}\}$ を見出すこと（次式

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{u}_{m/m}=1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}u_{n/n}=1$$

からひとりでに

$$\sum_{mn=1}^{\infty}v_{mn/mn}=1$$

がでてくる，すなわち規格化は正しく保たれる)．問題がつねに解けるものならば，例えば

$$v_{mn/m'n'} = \mathrm{u}_{m/m'} u_{n/n'}$$

はつねに解である(この行列が定符号であることは容易にわかる). しかし問題なのは, いつそれが唯一の解であるかということである.

それは, 2つの行列 $\{\mathrm{u}_{m/m'}\}$, $\{u_{n/n'}\}$ の少くとも 1 つが状態であるとき, そしてそのときだけであることを示す. まずこの条件が必要であること, すなわちどちらの行列も混合に対応しているときには, 多くの解が存在するということを証明する. そのようなときは (IV. 2. をみよ).

$$\mathrm{u}_{m/m'} = \alpha \mathrm{v}_{m/m'} + \beta \mathrm{w}_{m/m'}, \quad u_{n/n'} = \gamma v_{n/n'} + \delta w_{n/n'}.$$

($\mathrm{v}_{m/m'}$, $\mathrm{w}_{m/m'}$ は定符号で定数因子以上に異っており, $v_{n/n'}$, $w_{n/n'}$ もそうである. そして,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{v}_{m/m} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{w}_{m/m} = \sum_{n=0}^{\infty} v_{n/n} = \sum_{n=1}^{\infty} w_{n/n} = 1.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, $\alpha+\beta=1$, $\gamma+\delta=1$) そして容易に,

$$\pi+\sigma=\alpha, \quad \rho+\tau=\beta, \quad \pi+\rho=\gamma, \quad \sigma+\tau=\delta$$

$$\pi, \rho, \sigma, \tau > 0$$

として,

$$v_{mn/m'n'} = \pi \mathrm{v}_{m/m'} v_{n/n'} + \rho \mathrm{w}_{m/m'} v_{n/n'} + \sigma \mathrm{v}_{m/m'} w_{n/n'} + \tau \mathrm{w}_{m/m'} w_{n/n'}$$

は解であることが証明される. このとき π, ρ, σ, τ の選び方は無限に多くあり ($\alpha+\beta=\gamma+\delta$ だから, 4個の独立変数に対し 3個の方程式になる. 例えば,

$$\rho=\gamma-\pi, \quad \sigma=\alpha-\pi, \quad \tau=(\delta-\alpha)+\pi,$$

すべてが >0 であるためには

$$\alpha-\delta=\gamma-\beta<\pi<\alpha, \gamma$$

でなければならないが, これをみたす π は無限に多い), しかも, $\mathrm{v}_{m/m'}$, $\mathrm{w}_{m/m'}$ も $v_{n/n'}$, $w_{n/n'}$ も 1 次独立なために, $\mathrm{v}_{m/m'} v_{n/n'}$, ……, $\mathrm{w}_{m/m'} w_{n/n'}$ は 1 次独立であるから, 異なる π, ρ, σ, τ は異なる $v_{mn/m'n'}$ に導くのである.

そこで十分であることを示すのであるが, $\mathrm{u}_{m/m'}$ が状態に対応していると仮定しよう(他の場合も同様に行われる). そうすると $\mathrm{U}=P_{[\varphi]}$ であり, 規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ は任意であったから, $\varphi_1=\varphi$ と仮定することができる. $\mathrm{U}=P_{[\varphi]}$ の行列は明らかに

$$\mathrm{u}_{m/m'} \begin{cases} =1, & m=m'=1 \text{ に対して,} \\ =0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

である. したがって

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn/m'n} \begin{cases} =1, & m=m'=1 \text{ に対して}, \\ =0, & \text{それ以外}, \end{cases}$$

とくに $m \neq 1$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_{mn/mn} = 0$$

であるが，$v_{mn/m'n'}$ が定符号であるために，すべての $v_{mn/mn} \geqq 0$ であるから，($v_{mn/mn} = (U\Phi_{mn}, \Phi_{mn})$ である)，この場合

$$v_{mn/mn} = 0$$

である．すなわち

$$(U\Phi_{mn}, \Phi_{mn}) = 0,$$

したがって U の定符号性によってまた，m', n' は任意として

$$(U\Phi_{mn}, \Phi_{m'n'}) = 0$$

である (II. 5., 定理 *19.* をみよ)．すなわち，$m \neq 1$ から $v_{mn/m'n'} = 0$ であるが，エルミートの性質のために，これはまた $m' \neq 1$ からも導かれる．しかるに $m = m' = 1$ に対しては

$$v_{1n/1n'} = \sum_{m=1}^{\infty} v_{mn/mn'} = u_{n/n'}$$

がえられる．したがって，主張のとうり解 $v_{mn/m'n'}$ は一意的に決定される．

われわれの結果をまとめて，つぎのように定式化できる：$I+II$ における作用素 $U = \{v_{mn/m'n'}\}$ をもつ統計集団が，それによって I のみのなか，あるいは II のみのなかで決定される作用素 $\mathsf{U} = \{\mathsf{u}_{m/m'}\}$ または $U = \{u_{n/n'}\}$ をもつ統計集団によって一意的にきまるのは，つぎの条件がみたされるとき，そしてそのときのみである：

1. $$v_{mn/m'n'} = \mathsf{v}_{m/m'} v_{n/n'}$$

である．(次の

$$\text{Spur } U = \sum_{m,n=1}^{\infty} v_{mn/mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{v}_{m/m} \sum_{n=1}^{\infty} v_{n/n} = 1$$

から，$\mathsf{v}_{m/m'}$ および $v_{n/n'}$ に，たがいに逆数をなす定数因子をかけて

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{v}_{m/m} = 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_{n/n} = 1$$

とできることがわかる．しかしそのときは

$$\mathsf{u}_{m/m'} = \mathsf{v}_{m/m'}, \quad u_{n/n'} = v_{n/n'}$$

であることがわかる).

2. $v_{m/m'}=\bar{x}_m x_{m'}$ または $v_{n/n'}=\bar{x}_n x_{n'}$

のどちらかである ($\mathsf{U}=P_{[\varphi]}$ は

$$\varphi=\sum_{m=1}^{\infty} y_m\varphi_m$$

を意味するから

$$u_{m/m'}=\bar{y}_m y_{m'}$$

であり, $v_{m/m}$ に対しても同様である. $U=P_{[\xi]}$ についても類似の関係が成り立つ).

これからあと U および U をそれぞれ I および II への $\mathbf{U}$ の射影となづけよう[212].

さて $I+II$ の状態 $\mathbf{U}=P_{[\Phi]}$ を考える. それに属する波動函数 $\Phi(q, r)$ は規格化された完全直交系

$$\Phi_{mn}(q, r)=\varphi_m(q)\xi_n(r)$$

によって展開することができる:

$$\Phi(q, r)=\sum_{mn=1}^{\infty} f_{mn}\varphi_m(q)\xi_n(r).$$

したがって, この波動函数を係数 f_{mn} ($m, n=1, 2, \cdots\cdots$) でおきかえることもできる. ただ, それは

$$\sum_{mn=1}^{\infty}|f_{mn}|^2=\|\Phi\|^2$$

が有限という条件をみたさなければならない.

2つの作用素 F, F^* を

$$F\varphi(q)=\int\overline{\Phi(qr)}\varphi(q)dq$$

$$F^*\xi(r)=\int\Phi(qr)\xi(r)dr$$

によって定義することができるが, これらは線型で, それぞれ $\mathfrak{R}^I$ または $\mathfrak{R}^{II}$ で定義されながら $\mathfrak{R}^{II}$ または $\mathfrak{R}^I$ における値をもつ, という特色をもっている. 明らかに

$$(F\varphi, \xi)=(\varphi, F^*\xi)$$

212) $I+II$ の状態の射影は, 一般に I または II では混合になる. うえにのべたところを参照. この事情は L. Landau によって発見された: Z. Physik Bd. 45 (1927).

であるから（左辺の内積は $\mathfrak{R}^{II}$ で，右辺の内積は $\mathfrak{R}^{I}$ で作られる！）それらはたがいに共役の関係にある．$\mathfrak{R}^{I}$ と $\mathfrak{R}^{II}$ との違いは数学的には問題にならないから，II. 11. の結果を適用することができる．そうすると，積分作用素を扱っているのであるから，$\sum(F)$ および $\sum(F^*)$ は

$$\iint|\Phi(qr)|^2dqdr=\|\Phi\|^2=1 \quad (\|\Phi\| \text{ は } \mathfrak{R}^{I+II} \text{ にある！})$$

に等しく，したがって有限である．それゆえ F, F^* は連続，しかも完全連続な作用素であり，F^*F も FF^* も定符号作用素，そして

$$\mathrm{Spur}(F^*F)=\sum(F)=1,\quad \mathrm{Spur}(FF^*)=\sum(F^*)=1.$$

ふたたび $\mathfrak{R}^{I}$ と $\mathfrak{R}^{II}$ との違いに注目するならば，F^*F は $\mathfrak{R}^{I}$ において定義され，FF^* は $\mathfrak{R}^{II}$ において定義される．

$F\varphi_m(q)$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{mn}\xi_n(r)$ に等しくなるから，F の行列は $\{\overline{f}_{mn}\}$，同様に F^* の行列は $\{f_{mn}\}$ である（規格化された完全直交系 $\varphi_m(q)$ または $\xi_n(r)$ を使用したとき）．したがって F^*F, FF^* はそれぞれ

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{mn}f_{m'n}\right\} \quad \text{あるいは} \quad \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\overline{f}_{mn}f_{mn'}\right\}$$

という行列をもつ．

他方 $\mathsf{U}=P_{[\Phi]}$ は，直交系 $\Phi_{mn}(q, r)=\varphi_m(q)\xi_n(r)$ において行列 $\{\overline{f}_{mn}f_{m'n'}\}$ をもつから，それの I および II への射影である U および U はそれぞれ行列

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\overline{f}_{mn}f_{m'n}\right\} \quad \text{または} \quad \left\{\sum_{m=1}^{\infty}\overline{f}_{mn}f_{mn'}\right\}$$

をもつ[213]．したがって

$$\mathsf{U}=F^*F,\quad U=FF^*.$$

この命題は φ_m, ξ_n の選び方に無関係に成り立つ（U, U, F がそうだから）．

作用素 U, U は完全連続であって，II. 11. および IV. 3. にしたがって

$$\mathsf{U}=\sum_{k=1}^{\infty}w_k'P_{[\psi_k]},\quad U=\sum_{k=1}^{\infty}w_k''P_{[\eta_k]}$$

と書かれる．ここで ψ_k は $\mathfrak{R}^{I}$ での，η_k は $\mathfrak{R}^{II}$ での規格化された完全直交系を作り，すべての $w_k', w_k''\geqq 0$ である．さてこの 2 つの式で $w_k'=0$ または

213） 数学的議論は E. Schmidt の論文：Math. Ann., Bd. 63 (1907) にゆだねる．

$w_k''=0$ の項をおとし，その残りを $k=1, 2, \cdots\cdots$ と数えなおすことにする．そうすると ψ_k および η_k は規格化された直交系というだけで，必しも完全系ではなくなる；$\sum_{\kappa=1}^{\infty}$ のかわりに和 $\sum_{k=1}^{M'}$, $\sum_{k=1}^{M''}$ がくるが，M', M'' は ∞ に等しいかまたは有限である．しかしこんどはすべての w_k', $w_k''>0$ である．

1つの ψ_k に注目する．$\mathsf{U}\psi_k=w'_k\psi_k$ であるから，

$$F^*F\psi_k=w_k'\psi_k,\quad FF^*F\psi_k=w_k'F\psi_k,\quad UF\psi_k=w_k'F\psi_k$$

となる．さらに，

$$(F\psi_k,\ F\psi_l)=(F^*F\psi_k,\ \psi_l)=(\mathsf{U}\psi_k,\ \psi_l)$$
$$=w_k'(\psi_k,\ \psi_l)\begin{cases}=w_k',\ k=l\ \text{に対して,}\\ =0,\ k\neq l\ \text{に対して}\end{cases}$$

であるから，とくに

$$\|F\psi_k\|^2=w_k'$$

である．したがって $\frac{1}{\sqrt{w_k'}}F\psi_k$ は，$\mathfrak{R}^{II}$ において規格化された直交系を作り，しかも ψ_k の U に対するのと同じ固有値（すなわち w_k'）をもつ U の固有函数である．すなわち，U の各固有値はまた，U の少くとも同数の多重度をもつ固有値でもある．U と U とをいれかえると，これらは同一の多重度をもつ同一の固有値を有するという結果がえられる．したがって，w_k' と w_k'' とはその順序を別とすれば一致する．ゆえに $M'=M''=M$ であり，w_k'' の数える順序を変えれば，$w_k'=w_k''=w_k$ とすることができる．こうなれば，明らかに一般に $\eta_k=\frac{1}{\sqrt{w_k}}F\psi_k$ と選ぶことができる．そうすれば，

$$\frac{1}{\sqrt{w_k}}F^*\eta_k=\frac{1}{w_k}F^*F\psi_k=\frac{1}{w_k}\mathsf{U}\psi_k=\psi_k.$$

したがって，

$$\eta_k=\frac{1}{\sqrt{w_k}}F\psi_k,\quad \psi_k=\frac{1}{\sqrt{w_k}}F^*\eta_k\ \text{[212]}.$$

つぎに規格化された直交系 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots$ および $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots$ を完全系 $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_1', \psi_2', \cdots\cdots$ および $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots, \eta_1', \eta_2', \cdots\cdots$ へそれぞれ拡張する（どちらの組 $\psi_1', \psi_2', \cdots\cdots, \eta_1', \eta_2', \cdots\cdots$ も空，有限個あるいは無限個でありうる．そしてたがいに独立である）．これまでの考察では規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ および $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$ の選び方は自由であったから，それらを $\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots, \psi_1', \psi_2', \cdots\cdots$ および $\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots, \eta_1', \eta_2', \cdots\cdots$ にとることができる．

そこで ψ_k は φ_{μ_k} に，η_k は ξ_{ν_k} に対応するとしよう（$\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$ はたがいに異なる．$\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots$ も同様）．そうすると

$$F\varphi_{\mu_k}=\sqrt{w_k}\,\xi_{\nu_k},\quad F\varphi_m=0 \qquad m\neq\mu_1,\ \mu_2\cdots\cdots \text{ に対して．}$$

ゆえに，

$$f_{mn}\begin{cases}=\sqrt{w_k}, & m=\mu_k,\ n=\nu_k \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\\ =0, & \text{それ以外，}\end{cases}$$

あるいは，同じことであるが

$$\Phi(q,\ r)=\sum_{k=1}^{M}\sqrt{w_k}\,\varphi_{\mu_k}(q)\xi_{\nu_k}(r)$$

となる．

こうして，系 $\varphi_m(q)$ および $\xi_n(r)$ を適当に選ぶことによって，行列 $\{f_{mn}\}$ の各行および各列が，たかだか1個のゼロでない要素をもつようにすることができた（その要素が実で >0 である．つまり $\sqrt{w_k}$ に等しいということは以下にとって重要でない）．このような形式的な命題は，どんな物理的意味をもつのであろうか？

A は固有函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ と，すべてたがいに異なる固有値 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ とをもつ作用素，同様に B は $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$ と $b_1, b_2, \cdots\cdots$ とをもつとする．A は I の物理量に対応し，B は II の物理量に対応する．したがってそれらは同時に測定可能である．容易にわかるように，“A は値 a_m をもち，B は値 b_n をもつ”という命題は，状態

$$\Phi_{mn}(q,\ r)=\varphi_m(q)\xi_n(r)$$

を決定し，この状態は状態 $\Phi(q,\ r)$ のなかで

$$(P_{[\Phi_{mn}]}\Phi,\ \Phi)=|(\Phi,\ \Phi_{mn})|^2=|f_{mn}|^2$$

という確率をもつ．したがってわれわれの命題の意味はこうである：A, B は同時に測定可能であり，Φ についてそのどちらかを測定すれば，それによって他の方の値も一意的にきまってしまう（すべての $f_{mn}=0$ であるような a_m はありえない．なぜなら，もし，a_m がとにかく見出されるものならば，その全確率 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_{mn}|^2$ は 0 でありえず，したがって最低1つの n に対しては $f_{mn}\neq0$ である．b_n についても同様）．すなわち，状態 Φ において多くの A の値が可能であり $\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f_{mn}|^2>0\right.$ であるような，つまり $f_{mn}\neq0$ となる n が存在するような各 a_m――たいていはすべての a_m がそうである$\left.\right)$，またそれと

同じだけのBの値があるが$\left(\sum_{m=1}^{\infty}|f_{mn}|^2>0,\right.$ すなわち $f_{mn}\neq 0$ となる m の存在するようなすべての $\left.b_n\right)$, Φ はAおよびBの可能な値のあいだに1対1の対応をうちたてるのである.

可能な m を $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots$, それに対応する可能な$n$を $\nu_1, \nu_2, \cdots\cdots$ となづければ

$$f_{mn}\begin{cases}=c_k\neq 0, & m=\mu_k,\ n=\nu_k,\ k=1,\ 2, \cdots\cdots, \\ =0, & \text{それ以外}.\end{cases}$$

ゆえに (M は有限または ∞)

$$\Phi(q,\ r)=\sum_{k=1}^{M}c_k\varphi_{\mu_k}(q)\xi_{\nu_k}(r).$$

そうすると

$$\mathsf{u}_{mm'}=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{f}_{mn}f_{m'n}\begin{cases}=|c_k|^2, & m=m'=\mu_k,\quad k=1,\ 2, \cdots\cdots, \\ =0, & \text{それ以外},\end{cases}$$

$$u_{nn'}=\sum_{m=1}^{\infty}\bar{f}_{mn}f_{mn'}\begin{cases}|c_k|^2, & n=n'=\nu_k,\quad k=1,\ 2, \cdots\cdots, \\ =0, & \text{それ以外},\end{cases}$$

となり, したがって

$$\mathsf{U}=\sum_{k=1}^{M}|c_k|^2P_{[\varphi_{\mu_k}]},\quad U=\sum_{\kappa=1}^{M}|c_k|^2P_{[\xi_{\nu_\kappa}]}$$

となる. したがって I あるいは II へ射影すると Φ は一般に混合になる. それは $I+II$ のなかでのみ状態である. その理由は, Φ が含んでいるのは, I だけ, または II だけのなかでは役に立たないような, $I+II$ についての命題, つまりAおよびBの値相互の1対1対応についての命題だからである.

したがって, 各 Φ に対して選ぶことのできる A, B, すなわち φ_m, ξ_n はわれわれの条件をみたすものでなければならない. 任意の A, B に対してはこの条件はもちろん破れる. したがって状態 Φ は I と II とのあいだの特別の結合をうちたてるのであって, そのとき結びつけられる量 A, B は Φ に依存する. Φ がどこまでその量を, すなわち φ_m と ξ_n を確定するか, ということに判断をくだすのは難しいことではない. すべての $|c_k|$ が異っており, かつ $\neq 0$ ならば, U, U (これらは Φ によって確定する) は一意的に φ_m および ξ_n を決定する. (IV. 3. を参照). 一般の場合の議論は読者にまかせる.

けっきょく: $|c_k|^2>0$ のために, $M\neq 1$ に対しては U も U も状態ではな

い．$M=1$ に対してはともに状態であり；

$$\mathsf{U}=P_{[\varphi_{\mu_1}]},\quad U=P_{[\xi_{\nu_1}]}.$$

そのときは

$$\Phi(q,\ r)=c_1\varphi_{\mu_1}(q)\xi_{\nu_1}(r).$$

c_1 は $\varphi_{\mu_1}(q)$ のなかに含めることができるから，U, U は $\Phi(q,\ r)$ が $\varphi(q)\xi(r)$ という形をもつとき，そしてそのときにのみ状態であって，それぞれ $P_{[\varphi]}$, $P_{[\xi]}$ に等しい．

以上の結果にもとづいてさらにつぎのことを強調したい：I が状態 $\varphi(q)$ に，II が状態 $\xi(r)$ にあれば，$I+II$ は状態 $\Phi(q,\ r)=\varphi(q)\xi(r)$ にある．反対に，$I+II$ が $\varphi(q)\xi(r)$ という積の形に書けない状態 $\Phi(q,\ r)$ にあれば I および II は混合である．しかし，Φ は I および II における量の可能な値に1対1の対応をうちたてる．

3. 測定過程の分析

VI. 1. で展開した思想にしたがって，VI. 2. でえられた形式上の手段のたすけをかりて測定過程の議論を最後までおしすすめるまえに，VI. 2. の結果を応用して，過程 ***1.*** (V. 1) の統計的性格を説明するためにしばしば提案された可能性を排除しておこうと思う．それはつぎのような考え方にもとづいている：I を観測される系，II を観測者とする．測定のまえに I は状態 $\mathsf{U}=P_{[\varphi]}$ にあり，それに対して II は混合 $U=\sum_{n=1}^{\infty}w_nP_{[\xi_n]}$ にあったとすれば，$I+II$ は一意的にきまる混合 $\mathbf{U}$ となる．VI. 2. によってたやすく計算されるように

$$\mathbf{U}=\sum_{n=1}^{\infty}w_nP_{[\Phi_n]},\quad \Phi_n(q,\ r)=\varphi(q)\xi_n(r)$$

である．いま I の量 A の測定をすれば，これは I と II とを相互作用させることであり，あるエネルギー作用素 $\mathbf{H}$ による過程 ***2.*** (V. 1) である．それが時間 t を要したとすれば $\mathbf{U}$ は

$$\mathbf{U}'=e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathbf{H}}\mathbf{U}e^{\frac{2\pi i}{h}t\mathbf{H}}$$

に変るが，明らかに

$$\mathbf{U}'=\sum_{n=1}^{\infty}w_nP_{\left[e^{-\frac{2\pi i}{h}t\mathbf{H}}\Phi_n\right]}$$

である．ところで ψ_n を A の固有函数，η_n をある定った規格化された完全直

交系として，各 $\Phi_n(q, r)$ が $\psi_n(q)\eta_n(r)$ という形になるとすれば，いま行った干渉は測定としての性格をもつことになるであろう．なぜなら，それは I の各状態 φ を A の固有函数 ψ_n の混合に導くから，統計的性格のゆらいは，I は測定前にはっきりと定まった形態にあったが，II が混合だったということである――II の混合であるという性質が相互作用のあいだに $I+II$ へ“伝染する”，とりわけその I への射影が混合へもたらされる．すなわち，測定の結果が不正確なのは，測定前の観測者の状態が正確にわかっていなかったためである．観測者の自分自身の状態についての知識には自然法則的な制約がありうるのだから，うえのようなメカニズムが働いて統計的性格が生ずるというのは考えられることである．この制約は w_n の値に現われており，それは観測者だけによって（したがって φ とは独立に！）定まるべきものである．

しかしこの点でうえのような説明の仕方は挫折する．というのは，量子力学は

$$w_n=(P_{\psi_n}\varphi, \varphi)=|(\varphi, \psi_n)|^2$$

であること，すなわち w_n が φ に依存することを要求するから！ あるいは他の分解の仕方

$$\mathbf{U}'=\sum_{n=1}^{\infty}w_n'P_{[\Phi_n']}$$

があるかもしれない（$\Phi_n'(q, r)=\psi_n(q)\eta_n(r)$ は規格化されており，たがいに直交する）が，これとてもなんの役にも立たない．なぜなら w_n' は順序を別とすれば $\mathbf{U}'$ によって一意的に確定し（IV. 3.），したがって w_n に等しいからである[214]．

したがって，過程 *1.* の非因果性は，観測者の状態についての知識の不足によって生ずるのではない――そこで以下では，これはつねに完全に知れているものと仮定しよう．

VI. 1. の終りに定式化された問題をふたたびとりあげ，I, II, III はそこで与えた意味をもつものとする．I と II とを量子力学的に調べるためには VI. 2. での記号を使うが，III を計算のうちに含めないでおく（これについて VI. 1. で述べたことを参照）．A を本来測定すべき I の量，$\varphi_1(q), \varphi_2(q), \cdots\cdots$ をそれの固有函数とし，I は状態 $\varphi(q)$ にあるとする．

---

214) うえのような考え方にはほかの変種も可能であるが，やはり同じ根拠から排除されねばならない．

I を観測される系, $II+III$ を観測者とすると, われわれは過程 **1.** を適用すべきであり, そうすればつぎのことが見出される: 測定は I を状態 φ から φ_n ($n=1, 2, \cdots\cdots$) のうちの1つの状態へ, それぞれ確率 $|(\varphi, \varphi_n)|^2$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) で移行させる. いま $I+II$ を測定される系とし, III だけが観測者とすれば, どのように記述されるであろうか?

この場合にはつぎのようにいわなければならない: II は I における A の値を示す目盛りをもった測定装置である. この目盛りのうえの指針の位置は, 元来 III によって測定される II の物理量 B であって (II がすでに観測者の体内にある場合には, 目盛りと指針とのかわりにそれに対応する生理学的概念, 例えば網膜上の像がくる), その値は A の値と1対1に結びつけられている. A の値を $a_1, a_2, \cdots\cdots, B$ の値を $b_1, b_2, \cdots\cdots$ とし, ちょうど a_n と b_n とが結びつくように番号をつけてあるとする.

はじめ I は (知られていない) 状態 $\varphi(q)$ に, II は (知られている) 状態 $\xi(r)$ にあったとすれば, $I+II$ の状態は $\Phi(q, r)=\varphi(q)\xi(r)$ である. 測定は (II によって I に対して行われるかぎり), さきほどの例と同じく, ($I+II$ の) エネルギー作用素 H によって時間 t のあいだにおこなわれる. これは過程 **2.** であって Φ を

$$\Phi'=e^{-\frac{2\pi i}{h}tH}\Phi$$

に変える. 観測者 III の立場からみれば, つぎのような場合にだけ測定について語ることができる. すなわち, III が過程 **1.** によって, 同時に測定可能な量 A, B (それぞれ I および II における, またはともに $I+II$ における量) を測定するとすれば, 値の組 a_m, b_n の確率は $m\neq n$ のときは 0, $m=n$ のときは確かに w_n である. すなわち, II を"注視"すれば十分で, そうすれば I が測定されるのである. なおそのとき量子力学から $w_n=|(\varphi, \varphi_n)|^2$ であることが要求される.

このようなことが起れば, 測定の経過はそれが II において生ずるかぎりでは理論的に"解明される", つまり, VI で論じた境界は $I/II+III$ から $I+II/III$ へ移されることになる.

したがって数学の問題としてはこうなる: I における規格化された完全直交系 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ が与えられている. そのとき適当な $\mathfrak{R}^{II}$ における規格化された完全直交系 $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots$, および $\mathfrak{R}^{II}$ の状態 ξ, さらに $\mathfrak{R}^{I+II}$ におけるエネ

ルギー作用素 H と時間 t, を見出して，つぎのことが成り立つようにすること．φ を $\Re^{I}$ における任意の状態とし，

$$\Phi(q, r)=\varphi(q)\xi(r),$$

$$\Phi'(q, r)=e^{-\frac{2\pi i}{h}tH}\Phi(q, r)$$

とおけば，$\Phi'(q, r)$ の形が

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(q)\xi_n(r)$$

となる（c_n はもちろんφに依存する）．そのさい $|c_n|^2=|(\varphi, \varphi_n)|^2$ でなければならない（これがうえに定式化した物理的要求に同等であることは，VI. 2. で論じた）．

以下では $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots$ だけでなく $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$ および ξ も固定しておいて，H のかわりにユニタリー作用素

$$\varDelta=e^{-\frac{2\pi i}{h}tH}$$

を調べることにする．

数学の問題は VI. 2. で解決された問題を思わせるものがある．そこでは Φ' が与えられていて c_n, φ_n, ξ_n の存在を示したのであるが，ここでは φ_n, ξ_n を固定し，Φ, c_n をφとの依存関係において与えて，$\Phi'=\varDelta\Phi$ に対してこれらの c_n, φ_n, ξ_n が導かれるように $\varDelta$ を定めることが問題である．

$\varDelta$ をそのように定めることは事実可能であることを示す．このときわれわれにとって重要なのは原理だけ，すなわち，そのような $\varDelta$ がとにかく存在するということである．最も簡単で直観的な測定装置に対応する

$$\varDelta=e^{-\frac{2\pi i}{h}tH}$$

がこのような性質をもっているかどうかというそれ以上の問題には立ち入らない．なぜなら，すでにみたとおりわれわれの条件は事実上ある干渉が測定の性格をもつための直観的な規準に相当しており，また問題の測定装置は直観的な測定の性格をいずれにせよ有しているから，この $\varDelta$ がわれわれの条件をみたさない（少くとも近似的にでも）ときには，量子力学は直観に著しく矛盾する結果を与えるはずだからである[215]．したがって以下では，われわれの条件を厳密にみたす，ある抽象的な $\varDelta$ だけが与えられるであろう．

215) III. 4. で論じた位置測定の場合についての，これに対応した計算が Weizsäcker の論文：Z. Physik Bd. **70** (1931) のなかにある．

そこで φ_m ($m=0, \pm1, \pm2\cdots\cdots$) および ξ_n ($n=0, \pm1, \pm2\cdots\cdots$) はそれぞれ $\Re^I$ および $\Re^{II}$ の与えられた規格化された完全直交系とし（m, n は 1, 2, …… という値でなく，0, ±1, ±2, …… という値をとるとしたが，これは単に技術的な手段で，原理的にはどちらも同じことである），状態 ξ は簡単のため ξ_0 に等しいとする．作用素 $\varDelta$ を

$$\varDelta \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} x_{mn}\varphi_m(q)\xi_n(r) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} x_{mn}\varphi_m(q)\xi_{m+n}(r)$$

で定義すれば，$\varphi_m(q)\xi_n(r)$ も $\varphi_m(q)\xi_{m+n}(r)$ も $\Re^{I+II}$ における規格化された完全直交系だから，この $\varDelta$ はユニタリーである．ところで

$$\varphi(q)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\varphi, \varphi_m)\cdot\varphi_m(q), \qquad \xi(r)=\xi_0(r)$$

であるから，

$$\Phi(q, r)=\varphi(q)\xi(r)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\varphi, \varphi_m)\cdot\varphi_m(q)\xi_0(r),$$

$$\Phi'(q, r)=\varDelta\Phi(q, r)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(\varphi, \varphi_m)\cdot\varphi_m(q)\xi_m(r).$$

これでわれわれの目的は達せられた．さらに $c_n=(\varphi, \varphi_n)$ である．

$\varDelta$ の代りに H 自身をとって，具体的な Schrödinger の波動函数について例示すれば，この過程のメカニズムをいっそうよく見通すことができる．

観測される対象もまた観測者も（すなわち I も II も），それぞれただ1個の，$-\infty$ から $+\infty$ にわたって動く連続的変数 q または r で特徴づけることができる，すなわち両者を線型に動くことのできる点と考えるのである．そうすればそれらの波動函数は つねに $\psi(q)$ または $\eta(r)$ という形である．それらの質量 m_1 および m_2 が非常に大きいと仮定すると，エネルギー作用素のうち運動エネルギーの部分（すなわち，

$$\frac{1}{2m_1}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial q}\right)^2+\frac{1}{2m_2}\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$

のこと）は省略できて，H は測定にとって決定的な相互作用エネルギーの部分だけが残る．相互作用の部分として

$$\frac{h}{2\pi i}q\frac{\partial}{\partial r}$$

という特定の形を選ぼう．

すると，$I+II$ の波動函数 $\psi_t=\psi_t(q, r)$ に対する時間に依存する Schrödin-

ger 方程式は

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\psi_t(q,\ r)=-\frac{h}{2\pi i}q\frac{\partial}{\partial r}\psi_t(q,\ r),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+q\frac{\partial}{\partial r}\right)\psi_t(q,\ r)=0$$

となる．したがって

$$\psi_t(q,\ r)=f(q,\ r-tq).$$

$t=0$ に対して $\psi_0(q,\ r)=\Phi(q,\ r)$ ならば $f(q,\ r)=\Phi(q,\ r)$ であり，したがって

$$\psi_t(q,\ r)=\Phi(q,\ r-tq).$$

とくに $I,\ II$ の始めの状態が $\varphi(q)$ および $\xi(r)$ で表わされるならば，われわれの計算方式の意味で（もしそのなかに現われる時間 t を1に等しく選ぶならば）

$$\Phi(q,\ r)=\varphi(q)\xi(r),$$
$$\Phi'(q,\ r)=\psi_1(q,\ r)=\varphi(q)\xi(r-q)$$

となる．そこで，これは II による I の位置測定に使えること，すなわち，座標 q と r とが結合されていることを示そう（$q,\ r$ は連続スペクトルをもち，したがって，いくらでも精確にはなるが絶対的に精確には測定できないから，これは近似的にしか行うことができない）．

その目的のために，$\xi(r)$ は非常にせまい区間 $-\varepsilon<r<\varepsilon$ のなかだけで0と異なる（すなわち，観測者の測定前の座標 r は非常に精確に知られている）と仮定しよう．なお ξ が規格化されていなければならないことは，もちろんである：

$$\|\xi\|=1,\quad \text{すなわち}\quad \int|\xi(r)|^2dr=1.$$

q が区間 $q_0-\delta<q<q_0+\delta$ にあり，r が区間 $r_0-\delta'<r<r_0+\delta'$ にある確率は

$$\int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta}\int_{r_0-\delta'}^{r_0+\delta'}|\Phi'(q,\ r)|^2dqdr=\int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta}\int_{r_0-\delta'}^{r_0+\delta'}|\varphi(q)|^2|\xi(r-q)|^2dqdr.$$

$q_0,\ r_0$ が $\delta+\delta'+\varepsilon$ 以上に異なるときにはこれは0である．すなわち q_0 と r_0 とはたがいに緊密に結びつけられていて，その差が $\delta+\delta'+\varepsilon$ を超えることがないのである．$\delta'\geqq\delta+\varepsilon$ のように選んでおけば，$r_0=q_0$ のとき，ξ についての仮定によってこれは

$$\int_{q_0-\delta}^{q_0+\delta} |\varphi(q)|^2 dq$$

に等しい．しかるに δ, δ', ε は任意に小さく選ぶことができる（>0 でなければならないだけ！）から，これは，q, r がいくらでも精確に結びつけられており，確率密度が量子力学から要求される値 $|\varphi(q)|^2$ をもつ，ということを意味する．

すなわち，VI. 1. およびこの節で論じたような測定の諸関係は実現された．

例えば VI. 1. の 4 つの項からなる例に似たものとか，*II* によって *I* に対して行った測定の第 2 の観測者 III による制御とかのもっとこみいった例も同様に論ずることができる．それは読者にまかせよう．

訳者あとがき

本書は J. von Neumann : *Mathematische Grundlagen der Quanten -mechanik* (Berlin, Julius Springer 1932) の全訳である．本書のもつ意義については，湯川，彌永両先生の序文にくわしいから，ここでは著者についてだけ述べる．

Johann Luding von Neumann は 1903 年 12 月 28 日ハンガリーのブダペシュトに生まれた．ベルリン大学，ブダペシュト大学，チューリッヒ大学で学び，1927 年ベルリン大学の私講師となった．1923—28 年のあいだは主として集合論を研究したが，1929 年からヒルベルト空間論に精力的にとりくみ，その成果のうえにたって 1932 年に本書が書かれた．1930 年にプリンストン大学の講師，31 年に同教授となり，年の半分はアメリカで過すことになったが，1933 年プリンストン高級研究所の終身所員となるとともに，アメリカに移住し，1937 年にはアメリカの市民権をえた．1936 年以来，J. Murray と共同で"作用素環"の理論を発展させ，その副産物として"連続幾何学"をつくりあげた．他方このあいだに，エルゴート理論の研究をおこない，この分野でも里程石をうちたてた．また，位相群論においても重要な結果をえている．第2次世界大戦中から，オペレーションズ・リサーチ，ゲームの理論の研究を始め，経済学者 Morngenstern と共同で"ゲームの理論と経済行動"を著した．(1944 年初版，1948 年再版)．また同じころ電子計算機の理論をいちじるしく発展させ，戦後はプリンストン高級研究所附属の計算機械研究所長に任ぜられた．1954 年には，アメリカ原子力委員となった．1957 年2月8日ワシントンで癌のため亡くなった．

ほん訳にあたっては，本書の古典としての意義を考えて，もとの姿をなるべく忠実に伝えるようつとめたが，ただ，原著では大部分の数式が本文のなかにベタ組みではいっていて非常に読みづらいので，訳書では数式を別行にとりだした．また，原書では巻末にあった註を脚註にした．記号表，索引も原書にはなかったが，あった方がなにかと便利だと考えたので，訳者の責任において作成した．原書にかなり見受けられた誤植は気付いたかぎり訂正しておいた．

なお，この本には R. T. Beyer による英訳があるが ("*Mathematical*

Foundations of Quantum Mechanics", Princeton University Press, 1955), ほん訳のテキストとしてはドイツ語版を使い，英語版はときどき参照するにとどめた（英語版の内容はドイツ語版と全然変らない）.

最後に，このような地味な学術書の出版のためにいろいろ御尽力していただいた，みすず書房の松井巻之助氏に心からお礼を申しあげたい.

1957年10月21日

訳　者

人 名 索 引

（主に引用文献について）

事 項 索 引

(日本式ローマ字によるアルファベット順)

著者略歴

(Johann Ludwig von Neumann, 1903–1957)

1903年ハンガリーのブダペストに生れる．ベルリン大学，ブダペスト大学，チューリッヒ大学で学び，1927年ベルリン大学の私講師となる．1930年プリンストン大学講師，1931年同教授．1933年プリンストン高級研究所の終身所員となり，1937年アメリカの市民権を取得．オペレーションズ・リサーチ，ゲームの理論，電子計算機の理論などすぐれた業績を残した．1954年アメリカ原子力委員となり，1957年ワシントンでガンのため死亡．

訳者略歴

井上　健〈いのうえ・たけし〉 1941年京都大学理学部物理学科卒業．理学博士．京都大学名誉教授．2004年歿．訳書 スレーター／フランク『理論物理学入門』(岩波書店，1963–64) シッフ『量子力学』(共訳，吉岡書店，1971) ほか．

広重　徹〈ひろしげ・てつ〉 1952年京都大学理学部物理学科卒業．理学博士．1975年歿．著書『物理学史』(培風館，1968)『相対論の形成』，『原子構造論史』(みすず書房，1980，1981)．訳書 ランダウ／リフシッツ『力学』(共訳，東京図書，1967) ほか．

恒藤敏彦〈つねとう・としひこ〉 1953年京都大学理学部物理学科卒業．理学博士．京都大学名誉教授．著書『量子物理学の展望』(編著，1977)『弾性体と流体』(1983)『超電導・超流動』(1993)『超伝導の探究』(1995，以上岩波書店)．訳書 ブローダ『ボルツマン』(共訳，みすず書房，1957) ランダウ／リフシッツ『場の古典論』(共訳，東京図書，1954) ほか．

J. v. ノイマン

量子力学の数学的基礎

井上 健
広重 徹
恒藤敏彦
共訳

1957年11月15日 第1刷発行
2006年5月25日 第23刷発行

発行所 株式会社 みすず書房
〒113-0033 東京都文京区本郷5丁目32-21
電話 03-3814-0131(営業) 03-3815-9181(編集)
http://www.msz.co.jp

本文印刷所 理想社
扉・カバー印刷所 栗田印刷
製本所 鈴木製本所

Printed in Japan
ISBN 4-622-02509-4